

Rainer Schark
Theo Overhagen

Vektoranalysis Funktionentheorie Transformationen

Mit zahlreichen Abbildungen,
Aufgaben mit Lösungen und
durchgerechneten Beispielen

Verlag
Harri
Deutsch 

Mathematik – Ein Lehr- und Übungsbuch

Band 1: Gellrich/Gellrich;

Arithmetik, Algebra, Mengen- und Funktionenlehre

Band 2: Gellrich/Gellrich;

Matrizen und Determinanten, Lineare Gleichungssysteme

Vektorrechnung, Analytische Geometrie

Band 3: Gellrich/Gellrich;

Zahlenfolgen und -reihen, Einführung in die Analysis
für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Band 4: Scharck/Overhagen;

Vektoranalysis, Funktionentheorie, Transformationen

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH

Gräfstraße 47

60486 Frankfurt am Main

verlag@harri-deutsch.de

www.harri-deutsch.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1823-6

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus – sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden.

Zu widerhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

2., korrigierte Auflage 2008

©Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2008

Druck: fgb – freiburger graphische betriebe <www.fgb.de>

Printed in Germany

6 Konforme Abbildungen

6.1 Definition und Beispiele

Wir betrachten eine in einem Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbf{C}$ holomorphe Funktion $f(z)$ und stellen sie grafisch durch ausgewählte Punktmengen in der z -Ebene und ihre Bilder in der w -Ebene dar. Ist \mathcal{C} eine glatte orientierte Kurve in \mathcal{G} mit Parameterdarstellung

$$z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}, \quad t \in [a, b], \quad \text{mit } a < b \text{ und } r(t) \neq 0 \text{ in } [a, b],$$

dann hat \mathcal{C} in jedem Kurvenpunkt $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$, eine Tangente mit derselben Richtung wie $\dot{z}(t_0)$. (Da in der Kurventheorie die Bezeichnung $z'(t_0)$ speziell für den Tangenteneinheitsvektor reserviert ist, bezeichnen wir im folgenden die Ableitung nach einem allgemeinen Kurvenparameter t mit $\dot{z}(t_0)$.) Die Bildkurve \mathcal{C}' hat die Parameterdarstellung

$$w(t) = (f \circ z)(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}, \quad t \in [a, b].$$

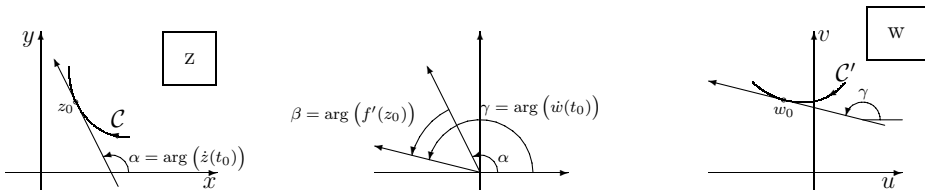
Sie ist wegen der Kettenregel differenzierbar mit

$$\dot{w}(t) = f'(z(t)) \cdot \dot{z}(t).$$

Gilt nun $f'(z) \neq 0$ in ganz \mathcal{G} , dann ist \mathcal{C}' sogar glatt, und die Tangente an \mathcal{C}' in $f(z_0)$ hat dieselbe Richtung wie

$$\dot{w}(t_0) = f'(z(t_0)) \cdot \dot{z}(t_0). \quad (6.1.1)$$

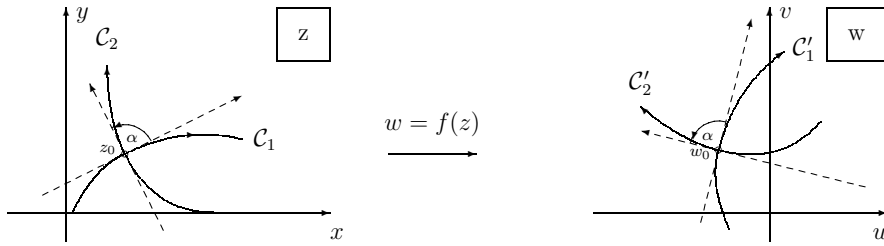
Bei Multiplikation zweier komplexer Zahlen addieren sich die jeweiligen Argumente, d.h., die Winkel zur positiven reellen Achse. Man erhält also die Richtung der Tangenten an \mathcal{C}' in $w_0 = f(z_0)$, indem man die Tangente an \mathcal{C} in z_0 um den Winkel $\arg(f'(z_0))$ zur positiven reellen Achse dreht.



Betrachtet man nun zwei glatte Kurven \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 in \mathcal{G} , die sich in z_0 schneiden, und ihre Bildkurven \mathcal{C}'_1 bzw. \mathcal{C}'_2 , dann ergibt sich für den Schnittwinkel der Bildkurven

$$\begin{aligned} \arg(\dot{w}_1(t_0)) - \arg(\dot{w}_2(t_0)) &= [\arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{z}_1(t_0))] - [\arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{z}_2(t_0))] \\ &= \arg(\dot{z}_1(t_0)) - \arg(\dot{z}_2(t_0)), \end{aligned}$$

d.h., bei der Abbildung $f(z)$ ändert sich der Schnittwinkel glatter Kurven nicht, sie ist **winkeltreu**.



Für den Abstand eines Punktes $z(t)$ zu z_0 bzw. des zugehörigen Bildpunktes $w(t)$ zu $w(t_0)$ ergibt sich aus der Definition der Differenzierbarkeit und (6.1.1)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|w(t) - w(t_0)|}{|t - t_0|} = \lim_{t \rightarrow t_0} |f'(z(t))| \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|z(t) - z_0|}{|t - t_0|},$$

also

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{w(t) - w(t_0)}{z(t) - z_0} \right| = |f'(z_0)|.$$

Das bedeutet, daß die durch $f(z)$ vermittelte geometrische Abbildung einer kleinen Umgebung von z_0 in der z -Ebene auf eine kleine Umgebung von $w(t_0)$ in der w -Ebene näherungsweise eine Ähnlichkeitstransformation mit Streckungsfaktor $|f'(z_0)|$ ist. Die Abbildung heißt auch „im Kleinen maßstabstreu“. Ein „Netz“ in der z -Ebene, das durch konzentrische Kreise um den Nullpunkt und Ursprungsgeraden gebildet wird, geht daher durch eine solche Abbildung näherungsweise in ein solches in der w -Ebene über.

Die Bedingung

$$f'(z_0) \neq 0$$

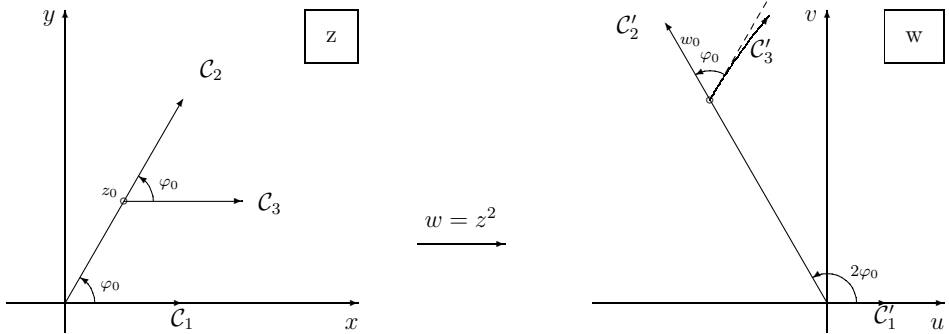
ist wesentlich für die oben gezeigten Eigenschaften. Zum Beispiel ist die Funktion

$$f(z) = z^2$$

holomorph in \mathbf{C} . Wegen $f'(0) = 0$ ist die Bedingung im Nullpunkt verletzt. Als Kurve C_1 wählen wir die positive reelle Achse. Sie wird durch $f(z)$ auf sich abgebildet. Ist C_2 ein beliebiger anderer Strahl durch den Nullpunkt mit Winkel φ_0 zur positiven reellen Achse, dann gilt für die Punkte der Bildkurve

$$w = f\left(re^{i\varphi_0}\right) = r^2 e^{2i\varphi_0},$$

d.h., C'_2 ist der Strahl durch den Nullpunkt mit Winkel $2\varphi_0$ zur positiven reellen Achse. Die Abbildung ist daher nicht winkeltreu.



Definition 6.1.1:

Seien $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in \mathcal{G}$ und $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung. Bildet $f(z)$ eine Umgebung $\mathcal{U}(z_0)$ von z_0 bijektiv auf eine Umgebung von $w_0 = f(z_0)$ so ab, daß der orientierte Schnittwinkel von je zwei sich in z_0 schneidenden glatten Kurven bei der Abbildung erhalten bleibt, dann heißt $f(z)$ **konform in z_0** .
Ist $f(z)$ in jedem Punkt $z \in \mathcal{G}$ konform, dann heißt $f(z)$ **konform in \mathcal{G}** .

Aus den einführenden Betrachtungen folgt

Satz 6.1.1: Eine in einem Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f(z)$ ist in allen Punkten $z \in \mathcal{G}$ konform, in denen $f'(z) \neq 0$ gilt.

Beispiele:

6.1.1 Die Funktion

$$f(z) = e^z$$

ist in \mathbb{C} holomorph mit

$$f'(z) = e^z \neq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Sie ist also in \mathbb{C} konform.

Die Parallelen zur x -Achse schneiden die Parallelen zur y -Achse jeweils rechtwinklig. Analoges gilt auch für die Bilder, d.h., die Ursprungsgeraden und die konzentrischen Kreise um den Ursprung in der w -Ebene (siehe Beispiel 1.1).

6.1.2 Die Funktionen $f(z) = z^n, n \geq 2$, sind in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ konform und in $z = 0$ nicht konform.

Konforme Abbildungen kann man dazu benutzen, komplizierte ebene Gebiete in relativ einfache ebene Gebiete (vorzugsweise eine Halbebene oder den Einheitskreis) zu transformieren.

Beispiele:

6.1.3 Im Beispiel 4.1 wurde das Dirichlet-Problem für den Einheitskreis betrachtet. Zur Lösung des Dirichlet-Problems für ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet transformiert man das Gebiet durch eine holomorphe Funktion mit nicht verschwindender Ableitung auf das Innere des Einheitskreises und den Rand des Gebiets auf den Einheitskreis. Dann löst man

die Randwertaufgabe für den Einheitskreis und bestimmt mit Hilfe der Umkehrfunktion der Transformation die Lösung des Ausgangsproblems.

Natürlich macht man bei Durchführung dieses Verfahrens einige Annahmen über Existenz und Auswirkung einer solchen Transformation auf die Differentialgleichung und spezielle Randbedingungen.

6.1.4 Mit Hilfe konformer Abbildungen können Strömungsbilder von speziellen zweidimensionalen Strömungen unter idealen Bedingungen bestimmt werden:

Die strömende Flüssigkeit soll inkompressibel und viskos sein, d.h., ihre Dichte ist konstant, und es tritt keine innere Reibung und damit auch keine Haftung an einem Hindernis auf. Ist die Strömung außerdem stationär, d.h., der (ebene) Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{V}(x, y, t) = \begin{pmatrix} V_1(x, y, t) \\ V_2(x, y, t) \end{pmatrix}$$

hängt nur vom Ort (x, y) und nicht von der Zeit t ab, dann kann man ihn auch als komplexe skalare Funktion

$$V(z) = V_1(x, y) + iV_2(x, y)$$

darstellen. Ist die Strömung zirkulationsfrei in \mathcal{G} , d.h., es gilt

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0,$$

dann existiert eine Potentialfunktion $\Phi(x, y)$ mit

$$\vec{V}(x, y) = \operatorname{grad} \Phi(x, y) \quad \text{bzw.} \quad V_1 = \Phi_x, \quad V_2 = \Phi_y.$$

Ist die Strömung außerdem quellenfrei, d.h., es gilt

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0,$$

dann folgt

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0,$$

d.h., Φ ist eine in \mathcal{G} harmonische Funktion und läßt sich mit einer konjugiert harmonischen Funktion $\Psi(x, y)$ zu einer holomorphen Funktion

$$F(z) := \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

ergänzen. $F(z)$ heißt **komplexes Potential**, $\Phi(x, y)$ **Geschwindigkeitspotential**, $\Psi(x, y)$ **Strömungsfunktion**.

Die Kurvenscharen

$$\Phi(x, y) = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \Psi(x, y) = \text{const.}$$

heißen **Äquipotentiallinien** bzw. **Stromlinien**.

Nach (2.4) schneiden die Kurven der einen Schar alle Kurven der anderen Schar orthogonal. Wegen $\vec{V}(x, y) = \operatorname{grad} \Phi(x, y)$ und $\operatorname{grad} \Phi$ senkrecht zu $\Phi = \text{const.}$ ist der Geschwindigkeitsvektor in jedem Punkt orthogonal zu den Äquipotentiallinien durch diesen Punkt, also Tangentenvektor der Stromlinien durch diesen Punkt, d.h., die Stromlinien beschreiben die Bewegung eines Teilchens in der Strömung.

Aus der Definition des komplexen Potentials folgt durch Differentiation und Einsetzen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (2.2)

$$F'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_1 - iV_2 = \overline{V(z)}. \quad (6.1.2)$$

Wir betrachten nun zunächst eine mit konstanter Geschwindigkeit $V_0 \in \mathbf{R}$ strömende Flüssigkeit. Integration von (6.1.2) ergibt für das komplexe Potential

$$F(z) = V_0 \cdot z.$$

Nun stören wir die Strömung durch ein Hindernis (z.B. einen Kreis mit Radius $a > 0$) und gehen davon aus, daß in genügend großer Entfernung hinter dem Hindernis die Strömung wieder gleichförmig ist. Das entsprechende komplexe Potential läßt sich dann in der Form

$$F(z) = V_0 \cdot z + G(z)$$

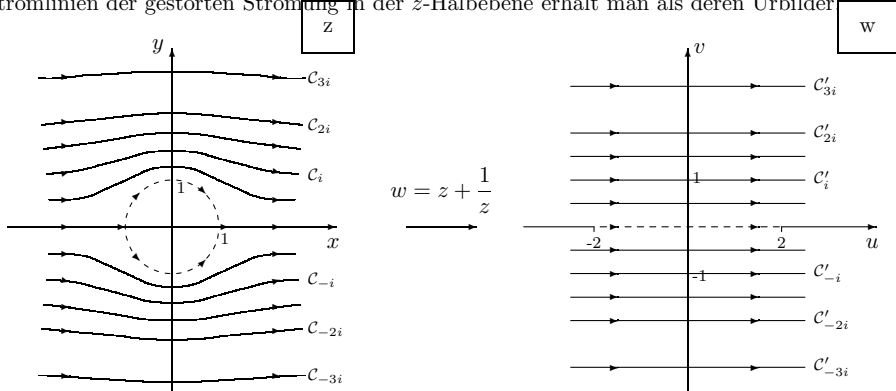
mit einer Funktion $G(z)$ darstellen, die den Einfluß der Störung beschreibt und für die

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} G'(z) = 0$$

gelten muß. Wir bilden die Stromlinien und das Hindernis mit Hilfe der Funktion

$$w = f(z) = z + \frac{a^2}{z}$$

auf die w -Ebene ab. Analog zu der in Abschnitt 6.5 explizit untersuchten Joukowski-Funktion $f_1(z) = (z + 1/z)/2$ bildet $f(z)$ das Äußere des Kreises $|z| = a$ in der oberen z -Halbebene auf die obere w -Halbebene und die Halbkreislinie (ohne Endpunkte) in der oberen z -Halbebene auf das Intervall $(-2a, 2a)$ ab. In der w -Halbebene wird also eine gleichförmige Strömung ohne Hindernis dargestellt mit den bekannten Stromlinien parallel zur reellen Achse, und die Stromlinien der gestörten Strömung in der z -Halbebene erhält man als deren Urbilder



6.1.5 Jede in einem Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbf{C}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

kann nach Beispiel 6.1.4 als komplexes Potential einer ebenen, stationären, in \mathcal{G} wirbel- und quellenfreien Strömung betrachtet werden. Zum Beispiel ergibt sich für die in $\mathcal{G} = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

das Geschwindigkeitspotential

$$\Phi(x, y) = u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

und die Strömungsfunktion

$$\Psi(x, y) = v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Als Äquipotentiallinien

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2p}, \quad p \in \mathbf{R}, p \neq 0,$$

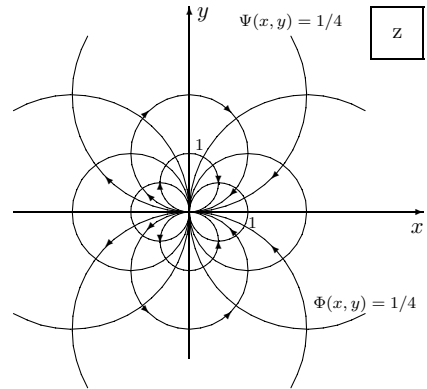
erhält man die Kreise

$$(x - p)^2 + y^2 = p^2$$

durch den Nullpunkt mit Mittelpunkt $z_0 = p$ auf der reellen Achse und mit Radius $|p|$, und als Stromlinien die Kreise

$$x^2 + (y + q)^2 = q^2$$

durch den Nullpunkt mit Mittelpunkt $z_0 = -iq$ auf der imaginären Achse und mit Radius $|q|$.



Physikalisch entspricht dies einer ebenen Strömung, bei der im Nullpunkt (der Singularität der Funktion $f(z)$) sowohl eine Quelle als auch eine Senke liegt, d.h., es tritt dort Flüssigkeit aus und gleichzeitig verschwindet Flüssigkeit.

6.1.6 Sei

$$\vec{E}(x, y) = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

die Feldstärke eines ebenen stationären elektrostatischen Feldes in einem ladungsfreien Gebiet. Analog zur Strömungsgeschwindigkeit in Beispiel 6.1.4 gilt (wegen $\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{E} = 0$)

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = 0,$$

und es existiert ein **komplexes Potential** $F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ mit

$$F'(z) = -(E_1(x, y) - iE_2(x, y)) = -\overline{E(z)}.$$

(Die Vorzeichen des komplexen Potentials einer Strömung bzw. eines elektrostatischen Feldes sind durch die Zusammenhänge in den Anwendungen festgelegt.)

$\Phi(x, y)$ heißt **elektrostatisches Potential** und die Kurven

$$\Phi(x, y) = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \Psi(x, y) = \text{const.}$$

Äquipotentiallinien bzw. **Feldlinien**. Die Feldlinien verlaufen an jeder Stelle in Richtung der Feldstärke.

Das komplexe Potential

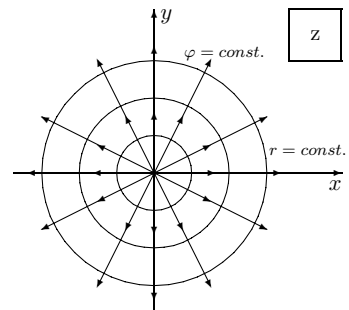
$$F(z) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln z = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r + i \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \varphi$$

liefert als Äquipotentiallinien wegen

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r = \text{const.} \quad \implies \quad r = \text{const.}$$

Kreise um den Ursprung und als Feldlinien wegen

$$\Psi(r, \varphi) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \varphi = \text{const.} \quad \implies \quad \varphi = \text{const.}$$

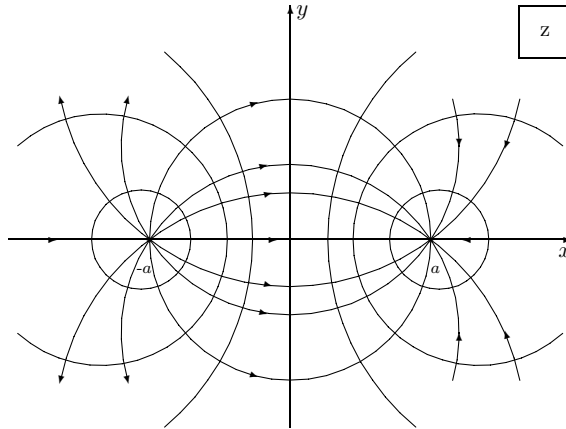


Strahlen, ausgehend vom Ursprung. Es stellt damit das komplexe Potential einer Punktladung q im Ursprung dar.

Sei $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. Betrachtet man zwei Punktladungen $+q$ und $-q$ in $z = a$ bzw. $z = -a$, dann erhält man das zugehörige Potential als Summe der Einzelpotentiale, also

$$F_a(z) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln(z + a) + \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \ln(z - a) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + a}{z - a}.$$

Die Ladung $-q$ entspricht einer Quelle in der Strömungslehre, die Ladung $+q$ einer Senke. Die Feldlinien sind die Kreise durch $z = \pm a$, die Äquipotentiallinien die dazu gehörigen orthogonalen Kreise.



Wir betrachten nun q als Funktion von a und nehmen an, daß für $a \rightarrow 0$ die Funktion $aq(a)$ gegen ein q_0 konvergiert. Dann erhält man das komplexe Potential eines Dipols durch

$$\begin{aligned} F(z) &= \lim_{a \rightarrow 0} F_a(z) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{q(a)}{2\pi\epsilon_0} (\ln(z + a) - \ln(z - a)) \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} 2aq(a) \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln(z + a) - \ln(z - a)}{2a}. \end{aligned}$$

Mit $z_1 := z - a$ und

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln(z + a) - \ln(z - a)}{2a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln(z_1 + 2a) - \ln z_1}{2a} = \frac{d}{dz} (\ln z) = \frac{1}{z}$$

ergibt sich

$$F(z) = \frac{q_0}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{z}.$$

Die Äquipotential- und Feldlinien sind dieselben wie in Beispiel 6.1.5.

Aufgaben:

6.1.1 \mathcal{C} sei eine glatte Kurve in der z -Ebene durch den Punkt $z_0 = 1 - i$. Man bestimme den Winkel, um den die Tangente an \mathcal{C} in z_0 bei der Abbildung $w = z^4$ gedreht wird, und den Abbildungsmaßstab in z_0 .

6.1.2 Sei \mathcal{G} ein Gebiet der z -Ebene, \mathcal{G}' ein Gebiet der w -Ebene, und die in \mathcal{G} holomorphe Funktion $w = f(z)$ (mit $z = x + iy, w = u + iv$) bilde \mathcal{G} auf \mathcal{G}' ab. Man zeige für die Jacobi-Determinante

$$\mathcal{J}(x, y) := \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2.$$

6.1.3 Gegeben sei die Funktion $w = f(z) = \cos z$. Man gebe an, in welchen Punkten $f(z)$ konform ist, und bestimme die Bilder der Parallelen zur x - bzw. y -Achse.

6.1.4 Man bestimme die Bilder der Geraden $y = 2x$ und $x + y = 3$ in der z -Ebene unter der Abbildung $w = f(z) = z^2$ und stelle sie in der w -Ebene dar. Man zeige rechnerisch, daß der Schnittwinkel der beiden Geraden gleich dem Schnittwinkel der zugehörigen Bildkurven im jeweiligen Schnittpunkt ist.

6.2 Die Riemannsche Zahlenkugel

Wie oftmals in der Mathematik kann man durch Hintereinanderausführung mehrerer relativ einfacher Transformationen auch komplizierte ebene Gebiete z.B. in die obere Halbebene oder das Innere des Einheitskreises überführen. Wir betrachten in den folgenden Abschnitten einige für die Anwendungen wichtige Abbildungen. Dabei untersuchen wir vor allem die Bilder der Geraden und Kreise in der z -Ebene sowie diejenigen Punkte mit speziellen Abbildungseigenschaften.

Definition 6.2.1:

Seien $\mathcal{G} \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in \mathcal{G}$ und $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{C}$ eine Abbildung.

Gilt $f(z_0) = z_0$, dann heißt z_0 **Fixpunkt** von $f(z)$.

Ist $f(z)$ holomorph in \mathcal{G} und $f'(z_0) = 0$, dann heißt z_0 **kritischer Punkt** von f .

Wir erweitern nun die komplexe Zahlenebene (mit reeller x -Achse und imaginärer y -Achse) zu einem dreidimensionalen Raum (mit zur (x, y) -Ebene senkrechter z' -Achse durch den Nullpunkt) und nennen den (obersten) Punkt $(0|0|1)$ der Einheitskugel (mit Mittelpunkt $(0|0|0)$ und Radius 1) **Nordpol**, den (untersten) Punkt $(0|0|-1)$ **Südpol** und die Kugel **Riemannsche Zahlenkugel**. Durch die **stereographische Projektion**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbf{R},$$

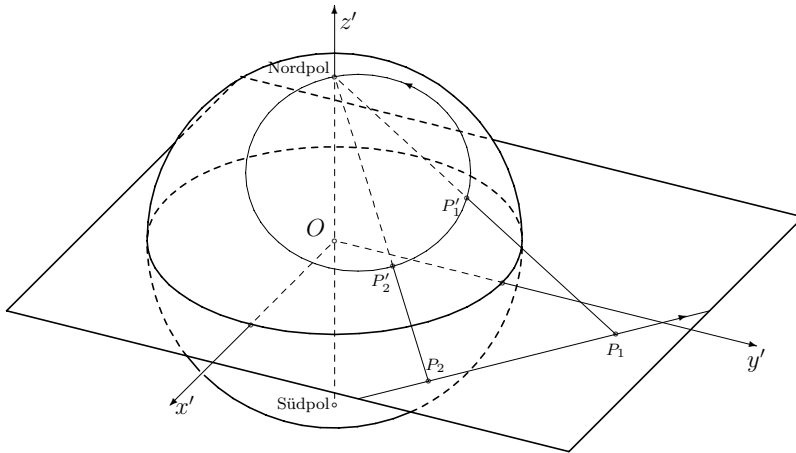
mit

$$x' = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \quad z' = \frac{x^2 + y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2}, \tag{6.2.1}$$

wird die komplexe Zahlenebene umkehrbar eindeutig auf die Kugeloberfläche außer dem Nordpol abgebildet. Geometrisch erhält man die Abbildung, indem man die Gerade durch den Nordpol und den Punkt $z = x + iy$ der komplexen Ebene mit der Kugel schneidet. Man überzeugt sich leicht, daß die Koordinaten des Bildpunktes der Kugelgleichung genügen:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Die Gesamtheit der Abbildungsstrahlen zu einer Geraden in der komplexen Ebene ist eine Ebene und schneidet die Kugel in einem Kreis durch den Nordpol. Umgekehrt bilden die Abbildungsstrahlen zu einem Kreis durch den Nordpol ebenfalls eine Ebene (die Kreisebene), die die komplexe Ebene in einer Geraden schneidet. Die Geraden der komplexen Zahlenebene entsprechen also den Kreisen durch den Nordpol auf der Riemannschen Zahlenkugel und umgekehrt. Analog kann man zeigen, daß die Kreise in der komplexen Zahlenebene den Kreisen auf der Riemannschen Zahlenkugel entsprechen, die nicht durch den Nordpol gehen, und umgekehrt.



Bewegt man sich auf der Riemannschen Zahlenkugel auf einem Kreis durch den Nordpol in Richtung des Nordpols, dann bewegt man sich auf der entsprechenden Urbildgeraden der komplexen Zahlenebene „in Richtung unendlich“. Wir erweitern nun die Menge der komplexen Zahlen \mathbf{C} um die „Zahl“ ∞ , der wir auf der Riemannschen Zahlenkugel den Nordpol zuordnen, und bezeichnen die erweiterte Zahlenmenge mit \mathbf{C}_∞ . Mit der neuen Zahl ∞ kann man auch rechnen, und zwar gelte

$$\frac{1}{\infty} := 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{1}{z} := \frac{1}{0} := \infty,$$

$$a + \infty := \infty \quad \text{und} \quad a \cdot \infty := \infty \quad \text{für alle } a \in \mathbf{C}_\infty, a \neq 0.$$

Ausdrücke der Form

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty \quad \text{bzw.} \quad \infty - \infty$$

sind vieldeutig und ergeben daher keinen Sinn.

Aufgaben:

6.2.1 Man bestimme alle Fixpunkte der Abbildung $w = f(z) = z^n$, $n \in \mathbf{N}$, und gebe sie für $n = 1, 2, 3, 4$ explizit an.

6.2.2 Man bestimme die Bilder

- der Kreise in der z -Ebene um den Nullpunkt, speziell des Kreises mit Radius 1,
- der Strahlen in der z -Ebene, ausgehend vom Nullpunkt,

bei der stereographischen Projektion.

6.2.3 Sei $z = x + iy \in \mathbf{C}$ beliebig, $(x'|y'|z')$ das Bild von z unter der stereographischen Projektion auf der Riemannschen Zahlenkugel. Man zeige

$$z = \frac{x' + iy'}{1 - z'}$$

6.3 Lineare Transformationen

Die allgemeine (**ganze**) **lineare Transformation**

$$f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbf{C}, \quad a \neq 0,$$

ist in ganz \mathbf{C} holomorph und wegen

$$f'(z) = a \neq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbf{C}$$

in \mathbf{C} konform. Sie hat keine kritischen Punkte.

Für $b = 0, a = 1$ ist $f(z) = z$ die identische Abbildung, bei der jeder Punkt Fixpunkt ist.

Für $b = 0, a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1$ ist $f(z) = az$ eine Streckung der z -Ebene mit Streckungsfaktor a und den Fixpunkten 0 und ∞ . Aus den Strahlensätzen folgt, daß Geraden auf parallele Geraden und Kreise auf Kreise abgebildet werden, wobei sich der Abstand der Urbild-Geraden bzw. des Kreismittelpunktes zum Ursprung sowie der Kreisradius jeweils um den Faktor a vergrößert (oder verkleinert).

Für $b = 0, a = e^{i\alpha} \neq 1$ (d.h. $|a| = 1$) ist $f(z) = e^{i\alpha}z$ eine Drehung der z -Ebene um den Winkel α mit den Fixpunkten 0 und ∞ .

Für $b \neq 0, a = 1$ ist $f(z) = z + b$ eine Parallelverschiebung der z -Ebene um b . ∞ ist der einzige Fixpunkt.

Jede allgemeine lineare Transformation

$$f(z) = az + b \quad \text{mit } a = |a|e^{i\alpha} \neq 0, \quad b \neq 0,$$

läßt sich erzeugen durch eine Streckung um den Faktor $|a|$, eine Drehung um $z_0 = 0$ mit Drehwinkel α und eine anschließende Parallelverschiebung um b . Bei jeder der einzelnen Abbildungen werden Geraden auf Geraden und Kreise auf Kreise abgebildet, also auch bei $f(z)$. ∞ ist immer Fixpunkt, und wegen

$$f(z) = z \iff z = az + b \iff z(1 - a) = b$$

hat $f(z)$ im Fall $a \neq 1$ genau einen weiteren Fixpunkt in $\frac{b}{1-a}$.

Weiß man, daß $f(z)$ eine lineare Transformation ist, und kennt zu zwei (verschiedenen) Urbildern z_1, z_2 die entsprechenden Bilder w_1 bzw. w_2 , dann lassen sich

$$a = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \quad \text{und} \quad b = w_1 - az_1$$

und damit die Funktion $f(z)$ vollständig bestimmen.

Wir betrachten eine Strömung, deren komplexes Potential eine lineare Transformation

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = az + b \quad \text{mit } a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2$$

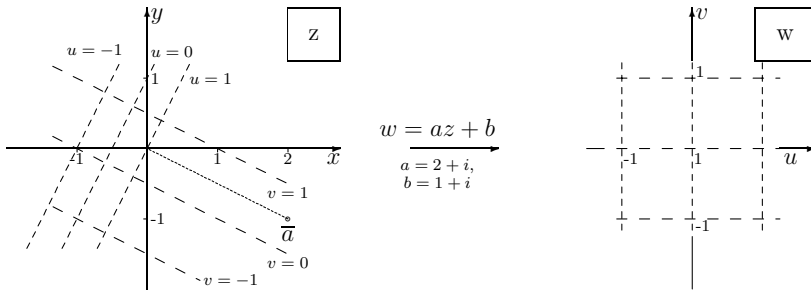
ist. Die Äquipotentiallinien sind wegen

$$u(x, y) = a_1x - a_2y + b_1$$

Geraden mit Steigung $m_1 = a_1/a_2$ für $a_2 \neq 0$ bzw. Parallelen zur y -Achse und daher senkrecht zu $\bar{a} = a_1 - ia_2$. Die Stromlinien sind wegen

$$v(x, y) = a_2x + a_1y + b_2$$

die Geraden mit Steigung $m_2 = -a_2/a_1$ für $a_1 \neq 0$ bzw. Parallelen zur x -Achse und daher parallel zu \bar{a} .



Aufgaben:

- 6.3.1** Man ermittle die allgemeinste (ganze) lineare Transformation $w = f(z)$ mit $\frac{z}{w} \mid \frac{i}{1} \mid \frac{-1}{i}$.
- 6.3.2** Gegeben sei der Kreis mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbf{C}$ und Radius $r > 0$ in der z -Ebene. Man bestimme den Mittelpunkt und den Radius des Bildkreises unter der linearen Transformation $w = f(z) = az + b$.
- 6.3.3** Man bestimme das Bild des Rechtecks $\{z = x + iy \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ unter der linearen Transformation $w = f(z) = (1 - i\sqrt{3})z + 1 - 2i$.

6.4 Gebrochen lineare Transformationen, Inversion

In Beispiel 1.12 haben wir die allgemeine gebrochen lineare Abbildung

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbf{C}, \quad |c| + |d| \neq 0$$

eingeführt. In Aufgabe 1.7 war zu zeigen, daß $f(z)$ im Fall $ad - bc = 0$ in ganz \mathbf{C} konstant ist. Konstante Funktionen sind als Transformationen ebener Gebiete ungeeignet. Wir betrachten daher im folgenden den Fall $ad - bc \neq 0$.

Gilt $c = 0$, dann ist

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

eine (im vorigen Abschnitt untersuchte) lineare Transformation. Wir setzen also außerdem $c \neq 0$ voraus. Eine Funktion

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbf{C}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0$$

heißt **gebrochen lineare Transformation** (oder auch **Möbius-Transformation**).

Wegen

$$z = f(z) \iff z = \frac{az + b}{cz + d} \iff cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

hat eine gebrochen lineare Transformation zwei Fixpunkte, die (im Fall $(d - a)^2 + 4bc = 0$) zusammenfallen können.

Außerdem bildet $f(z)$ wegen

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} \frac{z + b/a}{z + d/c} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} \quad (6.4.1)$$

und $ad - bc \neq 0$ den Punkt $-d/c$ auf ∞ und den Punkt ∞ auf a/c ab. Nach der Quotientenregel ist $f(z)$ in $\mathbf{C} \setminus \{-d/c\}$ differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

und daher wegen $ad - bc \neq 0$ in $\mathbf{C} \setminus \{-d/c\}$ konform.

Aus (6.4.1) folgt, daß man jede gebrochen lineare Transformation zusammensetzen kann aus

- der linearen Transformation $cz + d$,
- der Inversion $\frac{1}{z}$,
- der Drehstreckung $\frac{bc - ad}{c} z$ und
- der Parallelverschiebung $\frac{a}{c} + z$.

Lineare Transformationen (und damit auch die Drehstreckung und die Parallelverschiebung) führen Geraden in Geraden und Kreise in Kreise über. Das ist für die Inversion im allgemeinen nicht richtig. Zum Beispiel wird die Gerade $z(t) = 1 + it$, $t \in \mathbf{R}$, auf

$$w(t) = \frac{1}{1 + t^2} - i \frac{t}{1 + t^2}, \quad t \in \mathbf{R},$$

und damit wegen

$$\left| w(t) - \frac{1}{2} \right|^2 = \left(\frac{1}{1 + t^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{t}{1 + t^2} \right)^2 = \frac{1 + t^2}{(1 + t^2)^2} - \frac{1}{1 + t^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

auf den Kreis um $w_0 = 1/2$ mit Radius $1/2$ abgebildet.

Sowohl die Kreise als auch die Geraden in der komplexen Zahlenebene entsprechen Kreisen auf der Riemannschen Zahlenkugel. Analog dazu gibt es auch eine gemeinsame analytische Darstellung:

Die allgemeine Geradengleichung in der Ebene lautet

$$b_1 x + b_2 y + \frac{c}{2} = 0, \quad b_1, b_2, c \in \mathbf{R}, \quad |b_1| + |b_2| \neq 0.$$

Mit

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

ergibt sich

$$b_1(z + \bar{z}) - ib_2(z - \bar{z}) + c = 0$$

und mit $b := b_1 + ib_2$

$$\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0, \quad b \in \mathbf{C}, c \in \mathbf{R}.$$

Die allgemeine Kreisgleichung in der Ebene ist gegeben durch

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

bzw.

$$R^2 = |z - z_0|^2 = (z - z_0)(\overline{z - z_0}) = z\bar{z} - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} + |z_0|^2.$$

Mit $b := -z_0$, $c := |z_0|^2 - R^2$ erhält man

$$z\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0, \quad b \in \mathbf{C}, c \in \mathbf{R}.$$

Nach Multiplikation mit einer beliebigen reellen Zahl $a \neq 0$ und geeigneter Umbenennung der anderen Koeffizienten b und c erhält man eine äquivalente Gleichung. Die Formel

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0, \quad b \in \mathbf{C}, a, c \in \mathbf{R} \quad (6.4.2)$$

ist also eine gemeinsame Darstellung der Geraden (falls $a = 0$) und der Kreise (falls $a \neq 0$) in der Ebene.

Bei der Inversion $w = 1/z$ geht die Gleichung (6.4.2) über in

$$\frac{a}{w\bar{w}} + \frac{\bar{b}}{w} + \frac{b}{\bar{w}} + c = 0$$

bzw.

$$a + \bar{b}\bar{w} + bw + cw\bar{w} = 0,$$

und als Bild ergibt sich eine Gerade (falls $c = 0$) oder ein Kreis (falls $c \neq 0$).

Transformationen, die auf der Riemannschen Zahlenkugel Kreise in Kreise überführen, nennt man **Kreisverwandtschaften**. Die Inversion und damit auch jede gebrochen lineare Transformation ist also eine Kreisverwandtschaft.

Wegen $c \neq 0$ treten bei einer gebrochen linearen Transformation

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a_1z + b_1}{z + d_1} \quad \text{mit} \quad a_1 = \frac{a}{c}, \quad b_1 = \frac{b}{c}, \quad d_1 = \frac{d}{c}$$

drei Konstanten auf. Sie ist also durch Festlegung von drei verschiedenen Punkten in der z -Ebene und den zugehörigen Bildpunkten eindeutig festgelegt und kann durch Einsetzen dieser Werte berechnet werden. Man kann auch direkt eine Formel für $w = f(z)$ angeben:

Definition 6.4.1:

Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ verschiedene Punkte. Dann heißt

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} : \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}$$

Doppelverhältnis der vier Punkte.

Durch Einsetzen von $w = \frac{az + b}{cz + d}$ (siehe Aufgabe 6.4.1) erhält man

Satz 6.4.1: Sei $w = f(z)$ eine gebrochen lineare Transformation. Dann gilt:

(a) Das Doppelverhältnis von je vier verschiedenen Punkten $z_k \in \mathbf{C} \setminus \{-d/c\}$, $1 \leq k \leq 4$, bleibt bei der Abbildung invariant, das heißt, es gilt

$$(w_1, w_2; w_3, w_4) = (z_1, z_2; z_3, z_4).$$

(b) Die gebrochen lineare Transformation, die die drei verschiedenen Punkte z_1, z_2, z_3 auf die Punkte w_1, w_2, w_3 abbildet, ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (6.4.3)$$

Beispiele:

6.4.1 Gegeben seien die Punktepaare $\frac{z}{w} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1+i & -i \\ i & 0 & -1 \end{array} \right.$.

Die zugehörige gebrochen lineare Transformation erhält man aus

$$\begin{aligned} \frac{w-i}{w} \cdot \frac{-1}{-1-i} &= \frac{z-1}{z-1-i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-i} &\iff & w-i = w \frac{z-1}{z-1-i} (1+2i) \\ \iff & w \left(1 - \frac{z-1}{z-1-i} (1+2i)\right) = i &\iff & w \left(\frac{-2iz+i}{z-1-i}\right) = i \\ \iff & w = \frac{i(z-1-i)}{-2iz+i} = \frac{z-1-i}{-2z+1}. \end{aligned}$$

6.4.2 Gegeben seien die Punktepaare $\frac{z}{w} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & i & -i \\ 0 & 1 & \infty \end{array} \right.$.

Wegen $w_3 = \infty$ müssen wir die Gleichung (6.4.3) modifizieren. Für $w, w_1, w_2 \in \mathbf{C}$ gilt

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w - w_2}{w - w_1} = 1,$$

und daher erhalten wir die gesuchte gebrochen lineare Transformation aus

$$\begin{aligned} \frac{w}{w-1} &= \frac{z-1}{z-i} \cdot \frac{-2i}{-i-1} \\ \iff & w = (w-1) \frac{z-1}{z-i} (1+i) = w \frac{z-1}{z-i} (1+i) - \frac{z-1}{z-i} (1+i) \\ \iff & w \left(1 - \frac{z-1}{z-i} (1+i)\right) = -\frac{z-1}{z-i} (1+i) &\iff & w(-iz+1) = -z(1+i) + 1+i \\ \iff & w = \frac{-z(1+i) + 1+i}{-iz+1}. \end{aligned}$$

6.4.3 Gegeben seien die Punktepaare $\frac{z}{w} \left| \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \infty \\ 1 & 0 & i \end{array} \right.$.

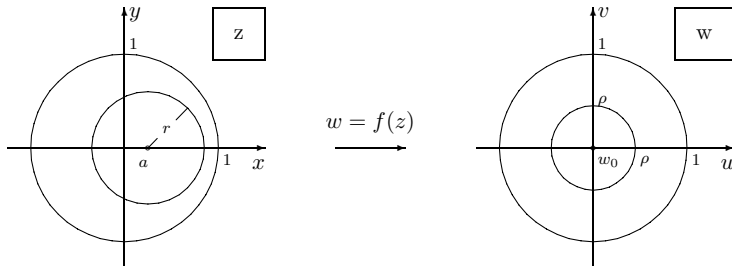
Analog zum vorigen Beispiel gilt für $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z - z_2}{z - z_1} = 1,$$

und wir erhalten die gesuchte gebrochen lineare Transformation aus

$$\begin{aligned} \frac{w-1}{w} \cdot \frac{i}{i-1} &= \frac{z}{z-1} && \iff && w-1 = w \frac{z}{z-1} (1+i) \\ \iff & w \left(1 - \frac{z}{z-1} (1+i)\right) = 1 && \iff && w \left(\frac{-iz-1}{z-1}\right) = 1 \\ \iff & w = \frac{z-1}{-iz-1}. \end{aligned}$$

- 6.4.4** Gesucht ist die gebrochen lineare Transformation, die den Einheitskreis auf sich und den Kreis $|z-a| = r < 1-a$ (mit $0 < a < 1$) auf einen Kreis mit Mittelpunkt $w_0 = 0$ abbildet.



Die x -Achse ist eine Gerade und wird daher auf eine Gerade oder einen Kreis in der w -Ebene abgebildet. Sie schneidet die beiden Kreise in der z -Ebene senkrecht, ihr Bild ist also zu den beiden Bildkreisen ebenfalls orthogonal. Damit kann das Bild nur eine Ursprungsgerade sein. Wir nehmen zunächst an, daß das Bild die u -Achse ist, wobei die Orientierung bei der Abbildung erhalten bleibt.

Da der Einheitskreis auf sich und die orientierte x -Achse auf die orientierte u -Achse abgebildet wird, folgt

$$f(-1) = -1 \quad \text{und} \quad f(1) = 1.$$

Außerdem wird der Punkt $z = a$ (als Mittelpunkt des kleinen Kreises) auf den Nullpunkt $w_0 = 0$ abgebildet. Damit folgt aus dem Satz über das Doppelverhältnis

$$\begin{aligned} \frac{w+1}{w} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{z+1}{z-a} \cdot \frac{1-a}{2} && \iff && w+1 = w(1-a) \frac{z+1}{z-a} \\ \iff & w \left(1 - \frac{(1-a)(z+1)}{z-a}\right) = -1 && \iff && w = -\frac{z-a}{az-1}. \end{aligned}$$

Soll nun die orientierte x -Achse nicht auf die u -Achse, sondern auf die orientierte Ursprungsgerade $w(t) = te^{i\alpha}$, $t \in \mathbf{R}$ (mit $0 \leq \alpha < 2\pi$) abgebildet werden, dann dreht man das Bild um w_0 mit Drehwinkel α , d.h., man multipliziert die Funktion mit dem Faktor $e^{i\alpha}$. Allgemein ergibt sich also die Transformation

$$w = -e^{i\alpha} \frac{z-a}{az-1} = e^{i(\alpha+\pi)} \frac{z-a}{az-1}.$$

- 6.4.5** Eine nützliche Eigenschaft gebrochen linearer Transformationen sei hier ohne Beweis angegeben: Spiegelpunkte bezüglich einer Geraden oder eines Kreises werden wieder in Spiegelpunkte überführt.

Dabei bezeichnen wir zwei Punkte als Spiegelpunkte bezüglich einer Geraden, wenn ihre Verbindungsstrecke die Gerade senkrecht trifft und von ihr halbiert wird. Sie sind Spiegelpunkte bezüglich eines Kreises mit Mittelpunkt M und Radius r , wenn sie auf demselben Strahl mit Anfangspunkt M liegen und das Produkt ihrer Abstände zu M gleich r^2 ist (siehe Beispiel 1.13).

Betrachten wir z.B. die gebrochen lineare Transformation

$$f(z) = \frac{z + i}{z - 1},$$

die Gerade $C : \{z = x + iy \mid x = 0\}$ (die y -Achse) und den Einheitskreis \mathcal{K} . Dann sind die Punkte $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = -1 + i$ Spiegelpunkte bezüglich C , und die Punkte z_1 und $z_3 = (1 + i)/2$ sind Spiegelpunkte bezüglich \mathcal{K} (wegen $z_3 = z_1/2$ und $|z_1| \cdot |z_3| = 1 = 1^2$). $f(z)$ ist eine Kreisverwandtschaft, und es gilt $f(z_4) = f(1) = \infty$.

$\mathcal{K}' = f(\mathcal{K})$ ist also eine Gerade oder ein Kreis. Nun gilt aber $z_4 \in \mathcal{K}$ und damit $\infty = f(z_4) \in \mathcal{K}'$, d.h., \mathcal{K}' ist eine Gerade. Analog ist $f(C')$ eine Gerade oder ein Kreis. Wegen $z_4 \notin C$ gilt $\infty \notin C'$, d.h., C' ist ein Kreis.

Eine Gerade ist durch zwei und ein Kreis durch drei Punkte eindeutig bestimmt. Durch Berechnung z.B. von

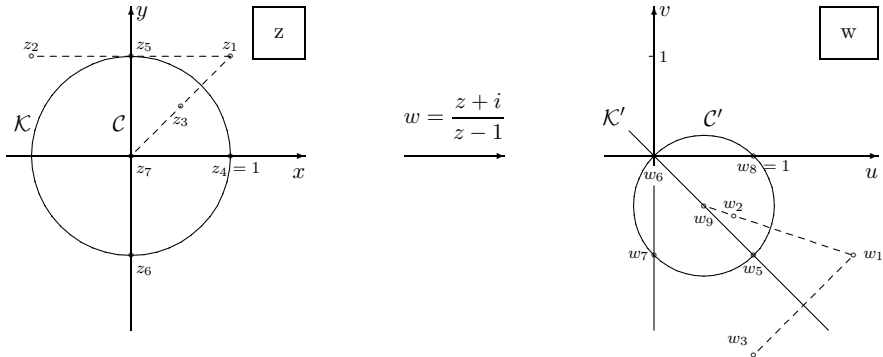
$$\begin{aligned} w_5 = f(z_5) = f(i) &= 1 - i, & w_6 = f(z_6) = f(-i) &= 0 \\ w_7 = f(z_7) = f(0) &= -i & (\text{oder } w_8 = f(\infty) &= 1) \end{aligned}$$

erhalten wir daher \mathcal{K}' als Gerade durch w_5 und w_6 und C' als Umkreis (des Dreiecks $w_5w_6w_7$ bzw. des Quadrats $w_5w_6w_7w_8$) mit Mittelpunkt $w_9 = (1 - i)/2$ und Radius $r = \sqrt{2}/2$.

$w_1 = f(z_1) = 2 - i$ und $w_3 = f(z_3) = 1 - 2i$ sind Spiegelpunkte bezüglich \mathcal{K}' , denn die Gerade \mathcal{K}' hat Steigung -1 und die Gerade durch w_1 und w_3 Steigung 1 , und der Mittelpunkt $\frac{3}{2} - i\frac{3}{2}$ der Strecke w_1w_3 liegt auf \mathcal{K}' .

w_1 und $w_2 = f(z_2) = 4/5 - 3i/5$ sind Spiegelpunkte bezüglich C' , denn sie liegen auf demselben Strahl $\{w(t) \mid w(t) = w_9 + t(w_1 - w_9), t \geq 0\}$ mit Anfangspunkt w_9 , und es gilt

$$|w_1 - w_9| \cdot |w_2 - w_9| = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{2} = r^2.$$



6.4.6 Mit Hilfe von Spiegelpunkten wollen wir die gebrochen linearen Transformationen bestimmen, die die obere z -Halbebene auf das Innere $\mathcal{K} = \{w \mid |w| < 1\}$ des Einheitskreises und einen Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ der oberen Halbebene auf den Nullpunkt $w_0 = 0$ abbilden.

Die x -Achse als Rand der oberen z -Halbebene muß auf den Einheitskreis $\partial\mathcal{K}$ abgebildet werden. Wegen $f(z_0) = w_0$ ist das Bild des Spiegelpunktes $z_1 = \bar{z}_0$ bezüglich der x -Achse der Spiegelpunkt von $w_0 = 0$ bezüglich des Einheitskreises, also $w_1 = \infty$. Damit ergibt sich

$$w = k \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

mit einem zu bestimmenden Faktor $k \in \mathbf{C}$. Für $z = x \in \mathbf{R}$ ist $w = f(z) \in \partial\mathcal{K}$, also $|w| = 1$, d.h.

$$1 = |k|^2 \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|^2 = |k|^2 \frac{(x - x_0)^2 + y_0^2}{(x - x_0)^2 + y_0^2} = |k|^2,$$

und daraus folgt

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Soll z.B. noch der Punkt $z_1 = \infty$ auf w_1 (mit $|w_1| = 1$) abgebildet werden, dann folgt

$$w = w_1 \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Aufgaben:

6.4.1 Man zeige, daß das Doppelverhältnis bei jeder gebrochen linearen Transformation invariant bleibt.

6.4.2 Sei

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0.$$

Man zeige:

- (a) Hat $f(z)$ mehr als 2 Fixpunkte, dann ist $f(z)$ die Identität.
- (b) Ist $z = \infty$ Fixpunkt von $f(z)$, dann ist $f(z)$ eine ganze lineare Transformation.

6.4.3 Man bestimme die gebrochen lineare Transformation $w = f(z)$ mit

$$\frac{z}{w} \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & \infty & 1 \\ \hline 0 & -1-i & 1+i \end{array} \right.$$

die Fixpunkte von $f(z)$ und das Bild der Geraden $z = iy, y \in \mathbf{R}$.

6.4.4 Sei $w = f(z)$ eine gebrochen lineare Transformation. Man zeige:
Bildet $f(z)$ die obere z -Halbebene auf die obere w -Halbebene ab, dann gilt

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad a, b, c, d \in \mathbf{R} \quad \text{und} \quad ad - bc > 0.$$

6.5 Die Joukowski-Funktion

In Beispiel 6.1.4 wurden Stromlinien bei einer durch einen Kreis gestörten gleichförmigen Strömung bestimmt. Die dort benutzte **Joukowski¹-Funktion**

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad z \neq 0, \tag{6.5.1}$$

ist auch wichtig für Anwendungen in der Luftfahrttechnik, speziell für die Bestimmung geeigneter Tragflächenprofile.

Die Abbildung hat wegen

$$z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \iff 2z = z + \frac{1}{z} \iff z^2 = 1 \iff z = \pm 1$$

genau zwei Fixpunkte, die wegen

$$f'(z) \Big|_{z=\pm 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \Big|_{z=\pm 1} = 0$$

gleichzeitig kritische Punkte sind. Für alle anderen Werte von $z \neq 0$ ist die Ableitung ungleich Null, die Abbildung also konform. Allerdings erkennt man sofort aus

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \iff 2wz = z^2 + 1 \iff z^2 - 2wz + 1,$$

¹ Nikolai Jegorowitsch Joukowski (1847 – 1921), russischer Aerodynamiker

daß jedes $w \neq \pm 1$ genau zwei Urbilder

$$z_1 = w + \sqrt{w^2 - 1} \quad \text{und} \quad z_2 = w - \sqrt{w^2 - 1} = \frac{w^2 - (\sqrt{w^2 - 1})^2}{w + \sqrt{w^2 - 1}} = \frac{1}{z_1}$$

besitzt. Zur Beschreibung der Funktion benötigt man also an Stelle der w -Ebene eine Riemannsche Fläche mit zwei Blättern, die z.B. längs $-1 \leq u \leq 1$ aufgeschnitten und kreuzweise verheftet werden.

Wir untersuchen nun die Abbildung eines Polarkoordinatennetzes in der z -Ebene, d.h. der Kreise $|z| = r = \text{const.}$ und $\arg z = \varphi = \text{const.}$ Einsetzen von

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{und} \quad w = u + iv = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right)$$

in (6.5.1) und die Euler-Formel ergibt

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi.$$

- Für den Einheitskreis, d.h. $z = 1 \cdot e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, ist $u = \cos \varphi$, $v = 0$, d.h., als Bild ergibt sich die zweimal durchlaufene Strecke $-1 \leq u \leq 1$.
- Für einen Kreis mit Radius $r > 1$ erfüllen die Bildpunkte die Ellipsengleichung

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \right]^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Das Bild ist also eine Ellipse mit Mittelpunkt $w = 0$, den Halbachsen

$$a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right|$$

und den Brennpunkten $w = \pm 1$

(wegen $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(r + 1/r)^2 - (r - 1/r)^2} = 1$).

- Der Kreis mit Radius $1/r < 1$ wird auf dieselbe Ellipse (mit entgegengesetztem Durchlaufsinne) abgebildet.
- Für die positive x -Achse, d.h. $z = re^{i \cdot 0}$, $0 < r < \infty$, ist

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad 0 < r < \infty, \quad v = 0,$$

d.h., als Bild ergibt sich der zweimal durchlaufene Strahl $1 \leq u < \infty$. Analog erhält man für die negative x -Achse, d.h. $\varphi = \pi$, als Bild den zweimal durchlaufenen Strahl $-\infty < u \leq -1$.

- Für die positive y -Achse, d.h. $\varphi = \pi/2$, ist

$$u = 0, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right).$$

Als Bild ergibt sich also die ganze (einmal durchlaufene) v -Achse. Analog ist das Bild der negativen y -Achse, d.h., mit $\varphi = 3\pi/2$, ebenfalls die ganze v -Achse.

– Für einen anderen Strahl vom Ursprung aus, d.h., mit $\varphi = \varphi_0 \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, erfüllen die Bildpunkte die Hyperbelgleichung

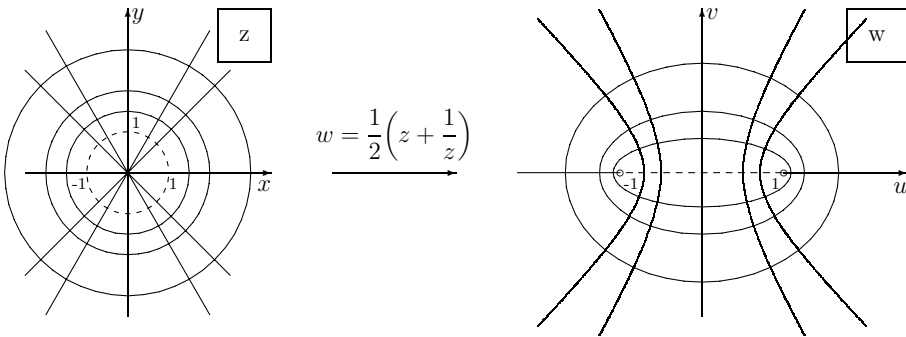
$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = \left[\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \right]^2 - \left[\frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \right]^2 = 1.$$

Das Bild ist also eine Hyperbel mit Mittelpunkt $w = 0$, den Halbachsen

$$a = |\cos \varphi_0|, \quad b = |\sin \varphi_0|,$$

den Brennpunkten $w = \pm 1$ (wegen $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$) und den Asymptoten $v = \pm (\tan \varphi_0)u$.

Da $f(z)$ (außer in ± 1) konform ist, schneiden sich die Ellipsen und Hyperbeln jeweils senkrecht.



Wir betrachten nun eine glatte Kurve \mathcal{C} in der z -Ebene durch $z_0 = 1$ und die ebenfalls glatte Bildkurve \mathcal{C}' durch $w_0 = 1$. Sei φ_0 der Winkel zwischen \mathcal{C} und der positiven x -Achse und θ_0 der Winkel zwischen \mathcal{C}' und der positiven u -Achse. Die Joukowski-Funktion ist in $z \neq 0$ holomorph. Aus

$$f'(z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \Big|_{z=1} = 0, \quad f^{(k)}(z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} (-1)^k \frac{k!}{z^{k+1}} \Big|_{z=1} = \frac{(-1)^k k!}{2}, \quad k \geq 2,$$

ergibt sich als Taylor-Reihe um $z = 1$ mit $f(1) = 1$

$$w - 1 = f(z) - 1 = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (z - 1)^k$$

und damit

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{w - 1}{(z - 1)^2} = \frac{1}{2} \in \mathbf{R}.$$

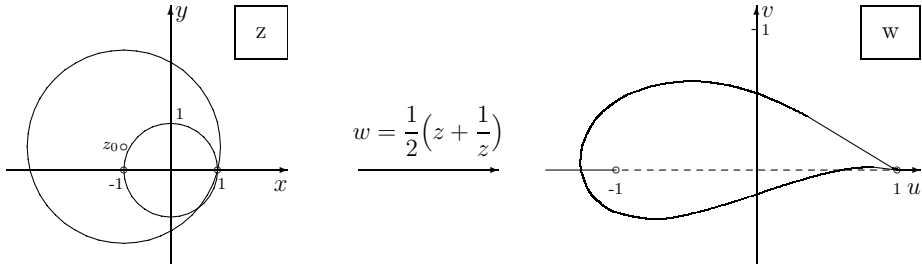
Andererseits ist

$$\frac{w - 1}{(z - 1)^2} = \frac{\rho e^{i\theta}}{r^2 e^{i2\varphi}} = \frac{\rho}{r^2} e^{i(\theta - 2\varphi)},$$

d.h. $\theta \rightarrow 2\varphi$ für $z \rightarrow 1$ bzw. $\theta_0 = 2\varphi_0$. Die Winkel bei $z_0 = 1$ werden also verdoppelt.

Ist nun \mathcal{C} ein Kreis mit Mittelpunkt $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$, durch $z_1 = 1$ und mit innerem Punkt $z_2 = -1$, dann bilden die beiden in $z_1 = 1$ zusammenstoßenden Kreisbögen von \mathcal{C} den Außenwinkel π , die Bilder damit den Winkel 2π . \mathcal{C}' hat also in $z_1 = 1$ eine „Spitze“. \mathcal{C} schneidet

den Einheitskreis in einem weiteren Punkt, C' also das Intervall $-1 < u < 1$, und da $z_2 = -1$ innerer Punkt von C ist, ist $w_2 = f(z_2) = -1$ innerer Punkt von C' . Die Bildkurve C' heißt Tragflügel- oder **Joukowski-Profil**. Die Strömung um ein solches Profil läßt sich also zu einer Strömung um einen Kreis transformieren.



Aus (6.5.1) erhält man mit

$$u + iv = \frac{1}{2} \left(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right)$$

die Äquipotentiallinien

$$u = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = const.$$

und die Stromlinien

$$v = \frac{y}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = const.$$

der zu der Joukowski-Funktion als komplexem Potential zugehörigen Strömung. Für $v = 0$ besteht die Stromlinie aus der Geraden $y = 0$ und dem Einheitskreis (siehe die Abbildung in Beispiel 6.1.4).

Aufgaben:

6.5.1 Man zeige, daß die Joukowski-Transformation $w = f(z) = z + a^2/z$, $a \in \mathbf{R}$, in der Form

$$\frac{w - 2a}{w + 2a} = \left(\frac{z - a}{z + a} \right)^2$$

dargestellt werden kann.

6.5.2 Man gebe Parameterdarstellungen der Bilder der positiv orientierten Kreise $|z| = r$ mit $r < 1$, $r = 1$, $r > 1$ sowie der Strahlen $z(t) = te^{it}$, $t > 0$, unter der Joukowski-Transformation an.

6.5.3 Sei $c > 0$, $w = f(z) = \frac{c}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

- (a) Man bestimme die Bilder der Kreise $|z| = r$ unter der Abbildung $f(z)$.
- (b) Gegeben sei die achsensymmetrische Ellipse mit Mittelpunkt $w = 0$, der Hauptachse a und der Nebenachse $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Man bestimme ihr Urbild unter der Abbildung $f(z)$.

6.5.4 Gegeben sei eine zur x -Achse parallele gleichförmige Strömung mit Geschwindigkeit $V_0 > 0$, die durch die Ellipse mit der Parameterdarstellung $z(t) = 3 \cos t + 2i \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, gestört wird.

- (a) Man bestimme das komplexe Strömungspotential.

- (b) Man gebe die Geschwindigkeit in einem Punkt $z = x + iy$ und speziell auf der Ellipse an.

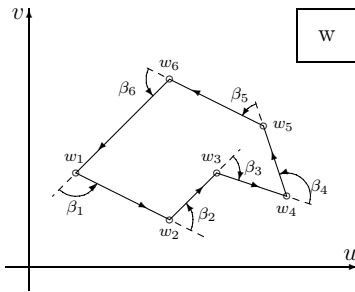
Anleitung: (Zu (a):) Durch die Umkehrtransformation $z_1 = f^{-1}(z)$ zu Aufgabe 6.5.3 erhält man (mit einem geeigneten $c > 0$) eine Strömung, die durch einen Kreis mit Radius r gestört wird, also das Problem aus Beispiel 6.1.4 mit der zugehörigen Transformation $w = f(z_1)$.

(Zu (b):) Beachte
$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw/dz_1}{dz/dz_1}.$$

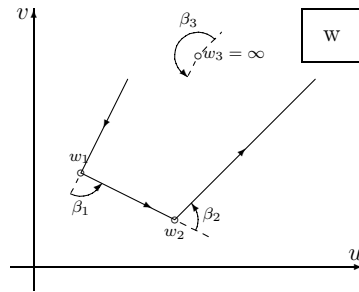
6.6 Die Schwarz-Christoffel-Transformation

Wir haben schon einige Funktionen kennengelernt, die ein bestimmtes Gebiet \mathcal{G} der z -Ebene auf die obere w -Halbebene abbilden. Das gilt nach Beispiel 1.16 für die Funktion $w = e^z$ und den Streifen $\mathcal{G} = \{x + iy \mid x \in \mathbf{R}, 0 < y < \pi\}$ und nach Beispiel 1.9 und für beliebiges $n \in \mathbf{N}$ für die Funktion $w = z^n$ und den unbeschränkten Sektor $\mathcal{G} = \{re^{i\varphi} \mid r > 0, 0 < \varphi < \pi/n\}$.

Im folgenden stellen wir eine Transformation vor, deren Umkehrtransformation ein gegebenes, durch einen geschlossenen oder unbeschränkten Streckenzug mit endlich vielen Ecken begrenztes einfach zusammenhängendes Polygon in der w -Ebene auf die obere z -Halbebene und dabei speziell den Rand des Polygons auf die x -Achse abbildet. Der Rand sei so orientiert und die Bezeichnung der n Ecken $\{w_1, \dots, w_n\}$ so gewählt, daß sie mit wachsendem Index durchlaufen werden und dabei das Innere des Polygons zur Linken liegt. Ist das Polygon unbeschränkt, dann setzt man $w_n = \infty$.



Beschränktes Polygon



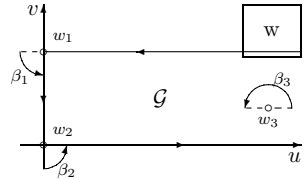
Unbeschränktes Polygon

Beim Durchlaufen einer Ecke $w_k \neq \infty$ ändert sich die Richtung um den „Außenwinkel“ β_k , wobei wie üblich der Winkel entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet sein soll. Ist w_k eine „einspringende“ Ecke, d.h., die Verbindungsstrecke der vorherigen und der nachfolgenden Ecke liegt nicht im Polygon, dann ist dementsprechend der zugehörige Außenwinkel negativ. Bei einem einmaligen Durchlauf des Randes eines geschlossenen Polygons beschreibt der Richtungsvektor einen Kreis, d.h., die Summe der Außenwinkel ist 2π . Analog ordnen wir bei einem unbeschränkten Polygon der Ecke $w_n = \infty$ den Außenwinkel β_n zu, der die Summe der übrigen Außenwinkel zu 2π ergänzt. Für die (aus der Elementargeometrie der Ebene bekannten) „Innenwinkel“ α_k an den Ecken $w_k, 1 \leq k \leq n$, eines geschlossenen Polygons gilt natürlich

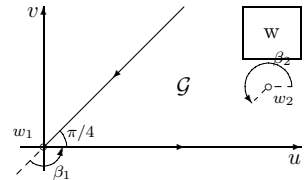
$$\alpha_k = \pi - \beta_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = (n-2)\pi.$$

Beispiele:

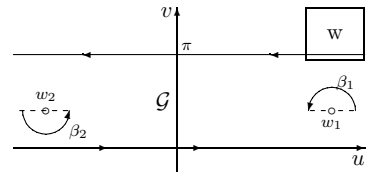
6.6.1 Der Halbstreifen $\mathcal{G} = \{u + iv \mid u > 0, 0 < v < \pi\}$ ist ein unbeschränktes Polygon mit den Ecken $w_1 = i\pi$, $w_2 = 0$ und $w_3 = \infty$ und den zugehörigen Außenwinkeln $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_3 = \pi$.



6.6.2 Sei $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$. Der Sektor $\mathcal{G} = \{re^{i\varphi} \mid r > 0, 0 < \varphi < \pi/m\}$ ist ein unbeschränktes Polygon mit den Ecken $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$ und den zugehörigen Außenwinkeln $\beta_1 = \pi - \pi/m$, $\beta_2 = \pi + \pi/m$.



6.6.3 Analog dazu kann man den Streifen $\mathcal{G} = \{u + iv \mid u \in \mathbf{R}, 0 < v < \pi\}$ als „Zweieck“ mit den Ecken $w_1 = w_2 = \infty$ und den zugehörigen Außenwinkeln $\beta_1 = \beta_2 = \pi$ auffassen.



Wir betrachten zunächst geschlossene Polygone:

Satz 6.6.1: Seien $a, b, z_0 \in \mathbf{C}$ mit $\text{Im}(z_0) \geq 0$, $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{R}$ mit $-\infty < z_1 < \dots < z_n < \infty$ und $\beta_k \in [-\pi, \pi]$, $1 \leq k \leq n$, mit $\sum_{k=1}^n \beta_k = 2\pi$. Dann bildet die **Schwarz-Christoffel²-Transformation**

$$w = f(z) = a \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n (\zeta - z_k)^{-\beta_k/\pi} d\zeta + b$$

die (offene) obere Hälfte der z -Ebene auf das Innere des geschlossenen Polygons in der w -Ebene mit den Ecken $w_1 = f(z_1), \dots, w_n = f(z_n)$ und den zugehörigen Außenwinkeln β_1, \dots, β_n sowie die x -Achse auf den Rand des Polygons ab.

Wir wollen hier den Beweis des Satzes nur skizzieren: Die Wahl von z_0 beeinflusst nur die Konstante b . Wir wählen $z_0 \in \mathbf{R}$ mit $z_0 < z_1$ und als Integrationsweg die x -Achse mit der Parameterdarstellung $z(t) = t$, $t \in \mathbf{R}$. Für die zugehörigen Bildpunkte gilt

$$w(t) = a \int_{z_0}^t \prod_{k=1}^n (\zeta - z_k)^{-\beta_k/\pi} d\zeta + b$$

und damit

$$\dot{w}(t) = a \prod_{k=1}^n (t - z_k)^{-\beta_k/\pi}.$$

Für die Richtungsänderung bei Durchlaufen der Kurve $w(t)$ im Punkt $w(t_0)$ erhält man also

$$\arg \dot{w}(t_0) = \arg a - \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\pi} \arg(t_0 - z_k).$$

² Elwin Bruno Christoffel (1829 – 1890), deutscher Mathematiker

Wir zeigen nun, daß das Bild der x -Achse unter der Transformation ein Streckenzug mit n Ecken ist, und daß an den Ecken die vorgegebenen Außenwinkel auftreten:

Sei $k_0 \in \mathbf{N}$ mit $1 \leq k_0 \leq n-1$. Wegen $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ gilt für ein beliebiges $t \in \mathbf{R}$ mit $z_{k_0} < t < z_{k_0+1}$

$$t - z_1 > 0, \quad \dots, \quad t - z_{k_0} > 0, \quad t - z_{k_0+1} < 0, \quad \dots, \quad t - z_n < 0$$

und damit

$$\arg(t - z_k) = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \leq k \leq k_0 \\ \pi & \text{für } k_0 + 1 \leq k \leq n \end{cases},$$

d.h.

$$\arg \dot{w}(t) = \arg a - \sum_{k=k_0+1}^n \beta_k.$$

Analog folgt für $-\infty < t < z_1$

$$\arg \dot{w}(t) = \arg a - \sum_{k=1}^n \beta_k = \arg a - 2\pi = \arg a$$

und für $z_n < t < \infty$

$$\arg \dot{w}(t) = \arg a.$$

In jedem der Intervalle $(-\infty, z_1)$, (z_1, z_2) , \dots , (z_{n-1}, z_n) , (z_n, ∞) ist also $\arg \dot{w}(t)$ konstant und damit $w(t)$ ein Geradenstück. Außerdem sind $\{w(t) \mid -\infty < t < z_1\}$ und $\{w(t) \mid z_n < t < \infty\}$ zueinander parallel.

Die Richtungsänderung von $\dot{w}(t)$ im Punkt z_{k_0} ist

$$\lim_{\substack{t \rightarrow z_{k_0} \\ t > z_{k_0}}} \arg \dot{w}(t) - \lim_{\substack{t \rightarrow z_{k_0} \\ t < z_{k_0}}} \arg \dot{w}(t) = \left(\arg a - \sum_{k=k_0+1}^n \beta_k \right) - \left(\arg a - \sum_{k=k_0}^n \beta_k \right) = \beta_{k_0}$$

und damit gleich dem gewünschten Außenwinkel an der Ecke $f(z_{k_0})$. Analog erhält man den Außenwinkel β_n an der Ecke w_n .

Mit Hilfe der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n (t - z_k)^{-\beta_k/\pi} dt = 0$$

kann man zeigen, daß

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) := w_0 \in \mathbf{C}$$

gilt, der Streckenzug also geschlossen ist.

Durch eine geschickte Transformation kann man einer der Polygonecken das Urbild $z = \infty$ zuordnen: Seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{R}$ mit $z_k < z_{k+1}$, $1 \leq k < n$, und $\zeta^* := (z_n - \zeta)^{-1}$. Dann gilt

$$\zeta = z_n - (\zeta^*)^{-1} \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta}{d\zeta^*} = (\zeta^*)^{-2}$$

und

$$\sum_{k=1}^n \beta_k = 2\pi \implies (\zeta^*)^{-2} = \prod_{k=1}^n (\zeta^*)^{-\beta_k/\pi} \implies d\zeta = \left(\prod_{k=1}^n (\zeta^*)^{-\beta_k/\pi} \right) d\zeta^*.$$

Für $z_k^* := (z_n - z_k)^{-1}$, $1 \leq k < n$, gilt

$$z_k < z_{k+1} \implies z_n - z_k > z_n - z_{k+1} \implies z_k^* < z_{k+1}^*,$$

d.h., die Transformation ändert die Orientierung der reellen Achse nicht. Für die Schwarz-Christoffel-Transformation erhält man dann

$$\begin{aligned}
 w &= a \int_{\mathcal{C}} \prod_{k=1}^n (\zeta - z_k)^{-\beta_k/\pi} d\zeta + b \\
 &= a \int_{\mathcal{C}} \prod_{k=1}^n \left(-(\zeta^*)^{-1} + z_n - z_k \right)^{-\beta_k/\pi} (\zeta^*)^{-\beta_k/\pi} d\zeta^* + b \\
 &= a \int_{\mathcal{C}} \left[\prod_{k=1}^{n-1} \left(-1 + \zeta^*(z_n - z_k) \right)^{-\beta_k/\pi} \right] \left(-1 + \zeta^*(z_n - z_n) \right)^{-\beta_n/\pi} d\zeta^* + b \\
 &= a (-1)^{-\beta_n/\pi} \int_{\mathcal{C}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(-1 + \zeta^*(z_n - z_k) \right)^{-\beta_k/\pi} d\zeta^* + b \\
 &= \left(a (-1)^{-\beta_n/\pi} \prod_{k=1}^{n-1} (z_n - z_k)^{-\beta_k/\pi} \right) \int_{\mathcal{C}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(-(z_n - z_k)^{-1} + \zeta^* \right)^{-\beta_k/\pi} d\zeta^* + b \\
 &= a^* \int_{\mathcal{C}} \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta^* - z_k^*)^{-\beta_k/\pi} d\zeta^* + b.
 \end{aligned}$$

Ein unbeschränktes Polygon in der w -Ebene (mit der Ecke $w = \infty$) läßt sich durch eine Schwarz-Christoffel-Transformation erzeugen, indem man den zugehörigen Außenwinkel $\beta_n \geq \pi$ einsetzt. Üblicherweise wählt man als zugehöriges Urbild $z_n = \infty$.

Im allgemeinen will man ein gegebenes Polygon in der w -Ebene auf die obere z -Halbebene abbilden. Die Außenwinkel sind festgelegt, und jede entsprechende Schwarz-Christoffel-Transformation ergibt ein Polygon, dessen Seiten nach einer geeigneten Drehung zu denen des Ausgangspolygons parallel sind. Durch geeignete Wahl der Konstanten a und b , die in der Formel eine Drehstreckung und eine Parallelverschiebung bewirken, erhält man ein Polygon, das zumindest in einer Seite mit dem Ausgangspolygon übereinstimmt. Die Aufgabe besteht nun darin, die Punkte z_k auf der x -Achse zu bestimmen, für die auch die anderen Polygonseiten die richtige Länge haben. Die Lösung dieses sogenannten „Parameterproblems“ ist im allgemeinen sehr kompliziert.

Beispiele:

6.6.4 Im Beispiel 6.6.3 ergibt sich mit $z_1 = 0$ und $z_2 = \infty$ für die Schwarz-Christoffel-Transformation

$$w = a \int z^{-1} dz + b = a \operatorname{Ln} z + b,$$

also die Umkehrfunktion von e^z .

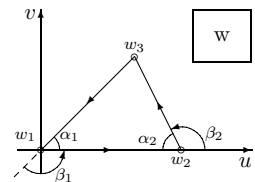
6.6.5 Im Beispiel 6.6.2 ergibt sich mit $z_1 = 0$ und $z_2 = \infty$ für die Schwarz-Christoffel-Transformation

$$w = a \int z^{-1+1/m} dz + b = ma z^{1/m} + b,$$

also die Wurzelfunktion.

6.6.6 Gegeben sei das Dreieck mit den Ecken $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ und w_3 und den zugehörigen Innenwinkeln α_1 , α_2 bzw. α_3 . Gesucht ist die Abbildung, die die offene obere z -Halbebene auf das Innere des Dreiecks abbildet. Setzt man $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ und $z_3 = \infty$, dann ergibt sich mit den zugehörigen Außenwinkeln $\beta_1 = \pi - \alpha_1$ und $\beta_2 = \pi - \alpha_2$

$$w = f(z) = a \int_0^z \zeta^{(-1+\alpha_1/\pi)} (\zeta - 1)^{(-1+\alpha_2/\pi)} d\zeta + b = a^* \int_0^z \zeta^{(\alpha_1/\pi-1)} (1 - \zeta)^{(\alpha_2/\pi-1)} d\zeta + b.$$



Mit $f(0) = 0$ folgt $b = 0$. Mit $f(1) = 1$ und dem Zusammenhang zwischen der Betafunktion

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

und der Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dz$$

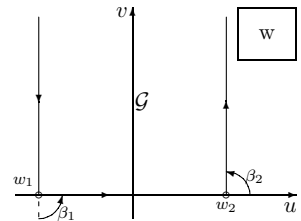
(siehe z.B. [2]) folgt

$$a^* = \frac{1}{B(\alpha_1/\pi, \alpha_2/\pi)} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2}{\pi}\right)}.$$

6.6.7 Sei $c > 0$. Gegeben sei das Gebiet

$\mathcal{G} := \{w = u + iv \mid -c < u < c, v > 0\}$. Gesucht ist die Abbildung, die die offene obere z -Halbebene auf \mathcal{G} abbildet. Mit $z_1 = -1, z_2 = 1$ und $z_3 = \infty$, den Ecken $w_1 = -c, w_2 = c, w_3 = \infty$ und den zugehörigen Außenwinkeln $\beta_1 = \beta_2 = \pi/2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} w = f(z) &= a \int (z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2} dz + b \\ &= a \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + b = a \arcsin z + b. \end{aligned}$$



Aus

$$-c = f(-1) = a \arcsin(-1) + b = -\frac{\pi}{2}a + b$$

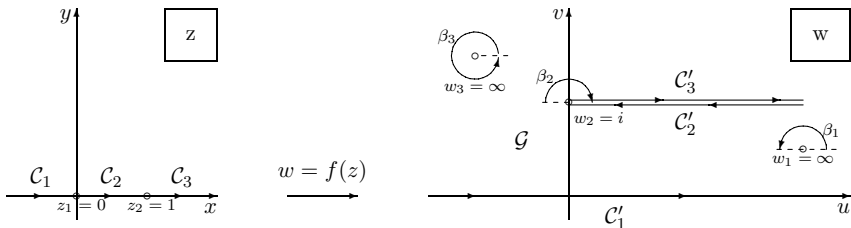
und

$$c = f(1) = a \arcsin(1) + b = \frac{\pi}{2}a + b$$

folgt $b = 0$ und $a = 2c/\pi$ und damit

$$w = \frac{2c}{\pi} \arcsin z \quad \text{bzw.} \quad z = \sin \frac{\pi w}{2c}.$$

6.6.8 Zur Bestimmung der Äquipotential- und der Feldlinien am Rand eines Plattenkondensators betrachtet man die Abbildung, die die offene obere z -Halbebene auf die geschlitzte obere Hälfte der w -Ebene $\mathcal{G} := \{w = u + iv \mid v > 0\} \setminus \{u + i \mid u \geq 0\}$ abbildet. \mathcal{G} faßt man als Inneres eines Polygons mit den Ecken $w_1 = \infty, w_2 = i, w_3 = \infty$ und den zugehörigen Außenwinkeln $\beta_1 = \pi, \beta_2 = -\pi, \beta_3 = 2\pi$ auf.



Setzt man $z_0 = 1, z_1 = 0, z_2 = 1$ und $z_3 = \infty$, dann erhält man

$$w = a \int_1^z \zeta^{-1}(\zeta - 1)^1 d\zeta + b = a \int_1^z \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta + b = a(z - \text{Ln } z - 1) + b.$$

Aus $i = w_2 = f(1) = a(1 - \text{Ln } 1 - 1) + b = b$ folgt $b = i$.

Für $C_3: 1 = z_2 < x < \infty = z_3$ gilt $f(x) = u + i$ mit $u \in \mathbf{R}$, d.h., $a(x - \text{Ln } x - 1)$ ist

reell und damit gilt auch $a \in \mathbf{R}$.

Für $C_1: -\infty < x < z_1 = 0$ ist $f(x) \in \mathbf{R}$. Speziell z.B. für $x = -1$ ergibt sich

$$f(-1) = a(-2 - \operatorname{Ln}(-1)) + i = a(-2 - \ln|-1| - i\pi) + i = -2a + i(1 - a\pi) \in \mathbf{R},$$

also $1 - a\pi = 0$ bzw. $a = 1/\pi$. Damit erhalten wir

$$w = \frac{1}{\pi}(z - \operatorname{Ln} z - 1) + i.$$

Die Abbildung $f_1(\zeta) := e^\zeta$ bildet den Streifen $\{\zeta = \xi + i\eta \mid 0 \leq \eta \leq \pi\}$ auf die obere Hälfte der z -Ebene ab. Damit folgt für die zusammengesetzte Funktion

$$f_2(\zeta) := (f \circ f_1)(\zeta) = \frac{1}{\pi}(e^\zeta - \zeta - 1) + i = \frac{1}{\pi}(e^{\xi+i\eta} - \xi - i\eta - 1) + i$$

und für Realteil u bzw. Imaginärteil v

$$u = \frac{1}{\pi}(e^\xi \cos \eta - \xi - 1) \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{\pi}(e^\xi \sin \eta - \eta) + 1. \quad (6.6.1)$$

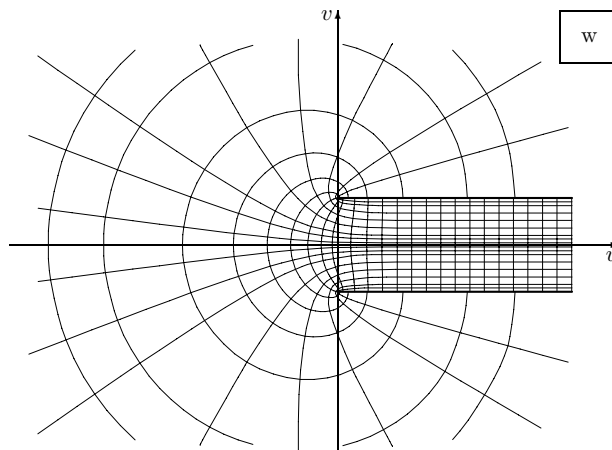
Faßt man die Umkehrfunktion f_2^{-1} als elektrostatisches Potential auf, dann sind nach Beispiel 6.1.6 die Äquipotentiallinien gegeben als Urbilder der Geraden $\xi = C_1 = \text{const.}$ und die Feldlinien als Urbilder der Geraden $\eta = C_2 = \text{const.}$. Mit (6.6.1) erhalten wir als Parameterdarstellungen der Äquipotentiallinien

$$u = \frac{1}{\pi}(e^\xi \cos C_2 - \xi - 1), \quad v = \frac{1}{\pi}(e^\xi \sin C_2 - C_2) + 1, \quad \xi \in \mathbf{R},$$

und als Parameterdarstellungen der Feldlinien

$$u = \frac{1}{\pi}(e^{C_1} \cos \eta - C_1 - 1), \quad v = \frac{1}{\pi}(e^{C_1} \sin \eta - \eta) + 1, \quad \eta \in \mathbf{R}.$$

Durch Spiegelung an den reellen Achsen erhält man den dargestellten Verlauf der am Rand eines Plattenkondensators auftretenden Äquipotential- und Feldlinien.



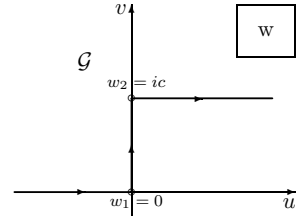
Aufgaben:

6.6.1 Gegeben sei der Streifen $\{u+iv \mid u \in \mathbf{R}, 0 < v < \pi\}$ und die „Ecken“ w_1 und w_2 wie in Beispiel 6.6.3. Mit Hilfe der Schwarz-Christoffel-Transformation bestimme man Funktionen $z = f(w)$, die den Streifen auf die obere z -Halbebene abbilden, durch Wahl von

(a) $z_1 = 0, z_2 = \infty,$

(b) $z_1 = \infty, z_2 = 0.$

6.6.2 Sei $c > 0$. Mit Hilfe der Schwarz-Christoffel-Transformation bestimme man eine Funktion $w = f(z)$, die die obere z -Halbebene auf das Gebiet $\mathcal{G} = \{u+iv \mid u < 0, v > 0\} \cup \{u+iv \mid u \geq 0, v > c\}$ abbildet.



6.6.3 Mit Hilfe der Schwarz-Christoffel-Transformation bestimme man eine Funktion $w = f(z)$, die die obere z -Halbebene auf das Gebiet $\mathcal{G} = \{u+iv \mid u \in \mathbf{R}, v > 0\} \setminus \{iv \mid 0 < v \leq \pi\}$ abbildet („Blitzableiterproblem“).

