

15 Integraltransformationen

15.1 Begriff der Integraltransformation

15.1.1 Allgemeine Definition der Integraltransformationen

Unter einer *Integraltransformation* versteht man einen Zusammenhang zwischen zwei Funktionen $f(t)$ und $F(p)$ der Form

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(p, t) f(t) dt. \quad (15.1a)$$

Die Funktion $f(t)$ heißt *Originalfunktion*, ihr Definitionsbereich *Originalbereich*. Die Funktion $F(p)$ nennt man *Bildfunktion*, ihren Definitionsbereich *Bildbereich*.

Die Funktion $K(p, t)$ heißt der *Kern* der Transformation. Während es sich bei t um eine reelle Veränderliche handelt, ist $p = \sigma + i\omega$ eine komplexe Variable.

Eine abgekürzte Schreibweise erhält man durch Einführung des Symbols \mathcal{T} für die Integraltransformation mit dem Kern $K(p, t)$:

$$F(p) = \mathcal{T}\{f(t)\}. \quad (15.1b)$$

Man spricht kurz von \mathcal{T} -Transformation.

15.1.2 Spezielle Integraltransformationen

Für unterschiedliche Kerne $K(p, t)$ und unterschiedliche Definitionsbereiche erhält man unterschiedliche Integraltransformationen. Die verbreitetsten sind die LAPLACE-Transformation, die LAPLACE-CARSON-Transformation sowie die FOURIER-Transformation. In **Tabelle 15.1** ist ein Überblick über Integraltransformationen von Funktionen einer Veränderlichen gegeben. Hinzu kommen heute vor allem bei der Bilderkennung oder bei der Charakterisierung von Signalen noch weitere Transformationen wie die *Wavelet-Transformation*, die *GABOR-Transformation* und die *WALSH-Transformation* (s. 15.6, S. 805ff.).

15.1.3 Umkehrtransformationen

In den Anwendungen ist die Rücktransformation einer Bildfunktion in die Originalfunktion von unmittelbarem Interesse. Man spricht auch von *Umkehrtransformation* oder *inverser Transformation*. Bei Benutzung des Symbols \mathcal{T}^{-1} schreibt sich die Umkehrung der Integraltransformation (15.1b) gemäß

$$f(t) = \mathcal{T}^{-1}\{F(p)\}. \quad (15.2a)$$

Der Operator \mathcal{T}^{-1} heißt der zu \mathcal{T} *inverse Operator*, so daß gilt:

$$\mathcal{T}^{-1}\{\mathcal{T}\{f(t)\}\} = f(t). \quad (15.2b)$$

Die Bestimmung der Umkehrtransformation bedeutet, die Lösung der Integralgleichung (15.1a) zu suchen, in der die Funktion $F(p)$ gegeben ist und die Funktion $f(t)$ gesucht wird. Wenn eine Lösung existiert, kann sie in der Form

$$f(t) = \mathcal{T}^{-1}\{F(p)\} \quad (15.2c)$$

geschrieben werden. Die explizite Bestimmung der *inversen Operatoren* für die verschiedenen Integraltransformationen, d.h. für verschiedene Kerne $K(p, t)$, gehört zu den grundlegenden Problemen der Theorie der Integraltransformationen. Der Anwender benutzt zur Lösung seiner Probleme vor allem die in entsprechenden Tabellen angegebenen *Korrespondenzen* von zusammengehörigen Bild- und Originalfunktionen (**Tabelle 21.14.1, 21.14.2, 21.14.3 und 21.14.4**).

Tabelle 15.1 Übersicht über Integraltransformationen von Funktionen einer Veränderlichen

Transformation	Kern $K(p, t)$	Symbol	Bemerkung
LAPLACE-Transformation	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-pt} & \text{für } t > 0 \end{cases}$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	$p = \sigma + i\omega$
Zweiseitige LAPLACE-Transformation	e^{-pt}	$\mathcal{L}_{II}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$	$\mathcal{L}_{II}\{f(t)I(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$ wobei $I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$
Endliche LAPLACE-Transformation	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-pt} & \text{für } 0 < t < a \\ 0 & \text{für } t > a \end{cases}$	$\mathcal{L}_a\{f(t)\} = \int_0^a e^{-pt} f(t) dt$	
LAPLACE-CARSON-Transformation	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ pe^{-pt} & \text{für } t > 0 \end{cases}$	$\mathcal{C}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} pe^{-pt} f(t) dt$	Die CARSON-Transformation kann auch als zweiseitige oder endliche Transformation auftreten.
FOURIER-Transformation	$e^{-i\omega t}$	$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$	$p = \sigma + i\omega \quad \sigma = 0$
Einseitige FOURIER-Transformation	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-i\omega t} & \text{für } t > 0 \end{cases}$	$\mathcal{F}_I\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$	$p = \sigma + i\omega \quad \sigma = 0$
Endliche FOURIER-Transformation	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-i\omega t} & \text{für } 0 < t < a \\ 0 & \text{für } t > a \end{cases}$	$\mathcal{F}_a\{f(t)\} = \int_0^a e^{-i\omega t} f(t) dt$	$p = \sigma + i\omega \quad \sigma = 0$
FOURIER-Kosinus-Transformation	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) & \text{für } t > 0 \end{cases}$	$\mathcal{F}_c\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$	$p = \sigma + i\omega \quad \sigma = 0$
FOURIER-Sinus-Transformation	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \operatorname{Im}(e^{i\omega t}) & \text{für } t > 0 \end{cases}$	$\mathcal{F}_s\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$	$p = \sigma + i\omega \quad \sigma = 0$
MELLIN-Transformation	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t^{p-1} & \text{für } t > 0 \end{cases}$	$\mathcal{M}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} t^{p-1} f(t) dt$	
HANKEL-Transformation ν -ter Ordnung	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t J_{\nu}(\sigma t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$	$\mathcal{H}_{\nu}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} t J_{\nu}(\sigma t) f(t) dt$	$p = \sigma + i\omega \quad \omega = 0$ $J_{\nu}(\sigma t) =$ BESSEL-Funktion erster Art ν -ter Ordnung
STIELTJES-Transformation	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{p+t} & \text{für } t > 0 \end{cases}$	$\mathcal{S}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{p+t} dt$	

15.1.4 Linearität der Integraltransformationen

Sind $f_1(t)$ und $f_2(t)$ transformierbare Funktionen, dann gilt

$$\mathcal{T}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} = k_1 \mathcal{T}\{f_1(t)\} + k_2 \mathcal{T}\{f_2(t)\}, \quad (15.3)$$

wobei k_1 und k_2 beliebige Zahlen sein können. Das bedeutet, daß eine Integraltransformation eine lineare Operation auf der Menge \mathcal{T} der \mathcal{T} -transformierbaren Funktionen darstellt.

15.1.5 Integraltransformationen für Funktionen von mehreren Veränderlichen

Integraltransformationen für Funktionen von mehreren Veränderlichen werden auch *Mehrfach-Integraltransformationen* genannt (s. [15.14]). Am verbreitetsten sind die zweifache LAPLACE-Transformation, d.h. die LAPLACE-Transformation für eine Funktion von zwei Veränderlichen, die zweifache LAPLACE-CARSON-Transformation und die zweifache FOURIER-Transformation. Mit dem Symbol \mathcal{L} für die LAPLACE-Transformation lautet die Definitionsgleichung

$$F(p, q) = \mathcal{L}^2\{f(x, y)\} \equiv \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} e^{-px-xy} f(x, y) dx dy. \quad (15.4)$$

15.1.6 Anwendungen der Integraltransformationen

1. Prinzipielle Bedeutung Neben der großen theoretischen Bedeutung, die Integraltransformationen in solchen grundlegenden Gebieten der Mathematik wie der Theorie der Integralgleichungen und der Theorie der linearen Operatoren besitzen, haben sie ein breites Anwendungsfeld bei der Lösung praktischer Probleme in Physik und Technik gefunden. Methoden mit dem Einsatz von Integraltransformationen werden häufig *Operatorenmethoden* genannt. Sie eignen sich zur Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, von Integralgleichungen und Differenzgleichungen.

2. Schema der Operatorenmethode Das allgemeine Schema des Einsatzes der Operatorenmethode mit Integraltransformation ist in **Abb.15.1** dargestellt. Die Lösung eines Problems wird nicht auf direktem Wege durch unmittelbare Lösung der Ausgangsgleichung gesucht; man strebt sie vielmehr über eine Integraltransformation an. Die Rücktransformation der Lösung der transformierten Lösung führt dann auf die Lösung der Ausgangsgleichung.

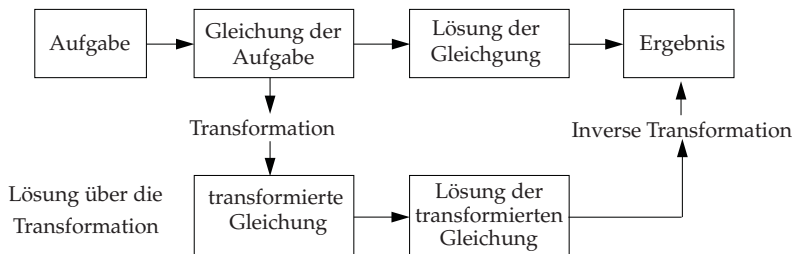


Abbildung 15.1

Die Anwendung der Operatorenmethode zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen besteht in den folgenden drei Schritten:

1. Übergang von einer Differentialgleichung für die unbekannte Funktion zu einer Gleichung für ihre Transformierte.
2. Auflösung der erhaltenen Gleichung im Bildbereich, die im allgemeinen keine Differentialgleichung mehr ist, sondern eine algebraische Gleichung, nach der Bildfunktion.

3. Rücktransformation der Bildfunktion mit Hilfe von \mathcal{T}^{-1} in den Originalbereich, d.h. Bestimmung der Originalfunktion.

Die Schwierigkeit der Operatorenmethode liegt oft nicht in der Lösung der Gleichung, sondern im Übergang von der Funktion zur Transformatierten und umgekehrt.

15.2 Laplace-Transformation

15.2.1 Eigenschaften der Laplace-Transformation

15.2.1.1 Laplace-Transformierte, Original- und Bildbereich

1. **Definition der Laplace-Transformation** Die LAPLACE-Transformation

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p) \quad (15.5)$$

ordnet einer gegebenen Funktion $f(t)$ der reellen Veränderlichen t , *Originalfunktion* genannt, eine andere Funktion $F(p)$ der komplexen Veränderlichen p zu, die *Bildfunktion* genannt wird. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Originalfunktion $f(t)$ in ihrem Definitionsbereich $t \geq 0$, dem *Originalbereich*, stückweise glatt ist und für $t \rightarrow \infty$ nicht stärker als $e^{\alpha t}$ mit $\alpha > 0$ gegen ∞ strebt. Der Definitionsbereich der Bildfunktion $F(p)$ wird *Bildbereich* genannt.

Häufig wird in der Literatur die LAPLACE-Transformierte auch in der WAGNERSchen oder LAPLACE-CARSONSchen Form

$$\mathcal{L}_W\{f(t)\} = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = p F(p) \quad (15.6)$$

eingeführt (s. [15.15]).

2. **Konvergenz** Das LAPLACE-Integral $\mathcal{L}\{f(t)\}$ konvergiert in der rechten Halbebene $\text{Re } p > \alpha$ (Abb.15.2). Die Bildfunktion $F(p)$ ist dann dort eine analytische Funktion mit den Eigenschaften

$$1. \lim_{\text{Re } p \rightarrow \infty} F(p) = 0. \quad (15.7a)$$

Jede Bildfunktion muß diese notwendige Bedingung erfüllen.

$$2. \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ (p \rightarrow \infty)}} p F(p) = A, \quad (15.7b)$$

falls die Originalfunktion $f(t)$ einen endlichen Grenzwert $\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ (t \rightarrow 0)}} f(t) = A$ besitzt.

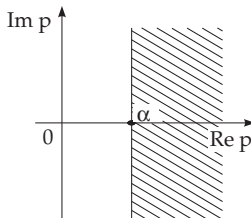


Abbildung 15.2

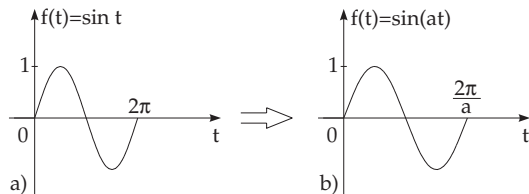


Abbildung 15.3

3. **Inverse Laplace-Transformation (Rücktransformation)** Aus der Bildfunktion erhält man die Originalfunktion mit Hilfe der *Umkehrformel*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \begin{cases} f(t) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases} \quad (15.8)$$

Der Integrationsweg dieses komplexen Integrals ist die Parallele $\operatorname{Re} p = c$ zur imaginären Achse, wobei $\operatorname{Re} p = c > \alpha$ gilt. Ist die Stelle $t = 0$ eine Sprungstelle, d.h. ist $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) \neq 0$, dann gibt das Integral dort den Mittelwert $\frac{1}{2}f(+0)$ an.

15.2.1.2 Rechenregeln zur Laplace-Transformation

Unter Rechenregeln versteht man im Zusammenhang mit Integraltransformationen die Abbildung von Operationen im Originalbereich auf andere Operationen im Bildbereich.

Im folgenden werden Originalfunktionen stets mit kleinen Buchstaben bezeichnet, die jeweils zugehörigen Bildfunktionen mit den entsprechenden großen Buchstaben.

1. Additions- oder Linearitätssatz

Die LAPLACE-Transformation einer Summe ist gleich der Summe der LAPLACE-Transformierten, wobei konstante Faktoren vor das LAPLACE-Integral gezogen werden können ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Konstanten):

$$\mathcal{L}\{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \dots + \lambda_n f_n(t)\} = \lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p) + \dots + \lambda_n F_n(p). \quad (15.9)$$

2. Ähnlichkeitssätze

Die LAPLACE-Transformierte von $f(at)$ ($a > 0$, a reell) ergibt eine LAPLACE-Transformierte, die gleich der Transformierten der durch a dividierten Originalfunktion ist, aber mit dem Argument p/a :

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (a > 0, \text{ reell}). \quad (15.10a)$$

In Analogie dazu gilt für die Rücktransformation

$$F(ap) = \frac{1}{a} \mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}. \quad (15.10b)$$

Die **Abb.15.3** zeigt die Ähnlichkeitstransformation am Beispiel einer Sinusfunktion.

■ Berechnung der LAPLACE-Transformierten von $f(t) = \sin(\omega t)$. Die Korrespondenz für die Sinusfunktion lautet $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = F(p) = 1/(p^2 + 1)$. Die Anwendung des Ähnlichkeitssatzes liefert

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = F(p/\omega) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{(p/\omega)^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

3. Verschiebungssätze

1. Verschiebung nach rechts Die LAPLACE-Transformierte einer um a ($a > 0$) nach rechts verschobenen Originalfunktion ist gleich der LAPLACE-Transformierten der nicht verschobenen Originalfunktion, multipliziert mit dem Faktor e^{-ap} :

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\} = e^{-ap} F(p). \quad (15.11a)$$

2. Verschiebung nach links Die LAPLACE-Transformierte einer um a nach links verschobenen Originalfunktion ist gleich der mit dem Faktor e^{ap} multiplizierten Differenz aus der LAPLACE-Transformierten der nicht verschobenen Originalfunktion und dem Integral $\int_0^a f(t) e^{-pt} dt$:

$$\mathcal{L}\{f(t + a)\} = e^{ap} \left[F(p) - \int_0^a e^{-pt} f(t) dt \right]. \quad (15.11b)$$

Die **Abb.15.4** und **15.5** zeigen die Rechtsverschiebung einer Kosinusfunktion und die Linksverschiebung einer Geraden.

4. Dämpfungssatz

Die LAPLACE-Transformierte einer mit dem Faktor e^{-bt} gedämpften Originalfunktion ist gleich der LAPLACE-Transformierten mit dem Argument $p + b$ (b beliebig komplex):

$$\mathcal{L}\{e^{-bt} f(t)\} = F(p + b). \quad (15.12)$$

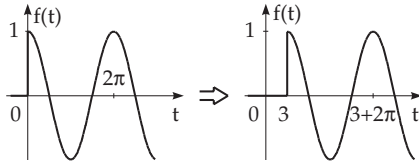


Abbildung 15.4

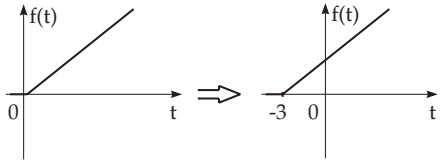


Abbildung 15.5

5. Differentiation im Originalbereich

Wenn die Ableitungen $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ für $t > 0$ existieren und die höchste auftretende Ableitung von $f(t)$ eine Bildfunktion besitzt, dann haben auch die niedrigeren Ableitungen einschließlich $f(t)$ eine Bildfunktion, und es gilt:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= p F(p) - f(+0), \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= p^2 F(p) - f(+0)p - f'(+0), \\ \dots \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= p^n F(p) - f(+0)p^{n-1} - f'(+0)p^{n-2} - \dots \\ &\quad - f^{(n-2)}(+0)p - f^{(n-1)}(+0) \text{ mit} \\ f^{(\nu)}(+0) &= \lim_{t \rightarrow +0} f^{(\nu)}(t). \end{aligned} \right\} \quad (15.13)$$

Aus der Gleichung (15.13) ergibt sich die folgende Darstellung des LAPLACE-Integrals, die zur näheren Berechnung von LAPLACE-Integralen genutzt werden kann:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{f(+0)}{p} + \frac{f'(+0)}{p^2} + \frac{f''(+0)}{p^3} + \dots + \frac{1}{p^n} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}. \quad (15.14)$$

6. Differentiation im Bildbereich

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(p). \quad (15.15)$$

Die n -te Ableitung der Bildfunktion ist gleich der LAPLACE-Transformierten der mit $(-t)^n$ multiplizierten Originalfunktion $f(t)$:

$$\mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\} = F^{(n)}(p) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (15.16)$$

7. Integration im Originalbereich

Die Bildfunktion eines Integrals über die Originalfunktion ist gleich der Bildfunktion der Originalfunktion, multipliziert mit $1/p^n$ ($n > 0$):

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n \right\} = \frac{1}{(n-1)!} \mathcal{L}\left\{ \int_0^t (t-\tau)^{(n-1)} f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{p^n} F(p). \quad (15.17a)$$

Im Spezialfall des gewöhnlichen einfachen Integrals gilt:

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{p} F(p). \quad (15.17b)$$

Im Originalbereich heben sich Differentiation und Integration gegenseitig auf, wenn die Anfangswerte verschwinden.

8. Integration im Bildbereich

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{f(t)}{t^n} \right\} = \int_p^\infty dp_1 \int_{p_1}^\infty dp_2 \dots \int_{p_{n-1}}^\infty F(p_n) dp_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_p^\infty (z-p)^{n-1} F(z) dz. \quad (15.18)$$

Diese Formel gilt nur, wenn $f(t)/t^n$ eine LAPLACE-Transformierte besitzt. Dazu muß $f(x)$ für $t \rightarrow 0$ genügend stark gegen Null streben. Als Integrationsweg kann ein beliebiger, von p ausgehender Strahl gewählt werden, der mit der reellen Achse einen spitzen Winkel bildet.

9. Divisionsatz

Im Spezialfall $n = 1$ von (15.18) gilt:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_p^\infty F(z) dz. \quad (15.19)$$

Damit das Integral (15.19) existiert, muß der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ existieren.

10. Differentiation und Integration nach einem Parameter

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right\} = \frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad (15.20a) \quad \mathcal{L} \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha) d\alpha \right\} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(t, \alpha) d\alpha. \quad (15.20b)$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann man manchmal LAPLACE-Integrale aus bereits bekannten berechnen.

11. Faltung

1. Faltung im Originalbereich Als Faltung zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bezeichnet man das Integral

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau. \quad (15.21)$$

Die Gleichung (15.21) wird auch *einseitige Faltung* im Intervall $(0, t)$ genannt. Eine *zweiseitige Faltung* tritt bei der FOURIER-Transformation (Faltung im Intervall $(-\infty, \infty)$) auf (s. 15.3.1.3.9., S. 794).

Die Faltung (15.21) besitzt die Eigenschaften

a) Kommutatives Gesetz: $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$, (15.22a)

b) Assoziatives Gesetz: $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$, (15.22b)

c) Distributives Gesetz: $(f_1 + f_2) * f_3 = f_1 * f_3 + f_2 * f_3$. (15.22c)

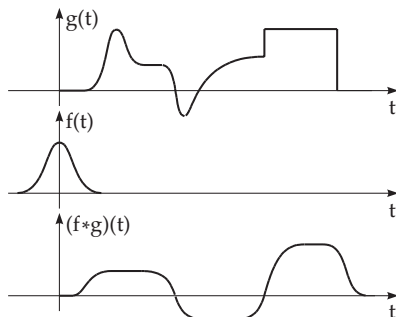


Abbildung 15.6

Im Bildbereich entspricht der Faltung die gewöhnliche Multiplikation:

$$\mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = F_1(p) \cdot F_2(p). \quad (15.23)$$

In **Abb. 15.6** ist die Faltung zweier Funktionen graphisch dargestellt. Man kann den Faltungssatz zur Bestimmung der Originalfunktion wie folgt benutzen:

1. Faktorisierung der Bildfunktion

$$F(p) = F_1(p) \cdot F_2(p).$$

2. Ermittlung der Originalfunktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ der Bildfunktionen $F_1(p)$ und $F_2(p)$ gemäß Tabelle.

3. Bildung der Originalfunktion durch Faltung von $f_1(t)$ mit $f_2(t)$ im Originalbereich gemäß $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$, die zur gegebenen Bildfunktion $F(p)$ gehört.

2. Faltung im Bildbereich (komplexe Faltung)

$$\mathcal{L}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} F_1(z) \cdot F_2(p-z) dz, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty} F_1(p-z) \cdot F_2(p) dz. \end{cases} \quad (15.24)$$

Die Integration erfolgt längs einer Parallelen zur imaginären Achse. Im ersten Integral müssen x_1 und p so gewählt werden, daß z in der Konvergenzhalbebene von $\mathcal{L}\{f_1\}$ liegt und $p-z$ in der Konvergenzhalbebene von $\mathcal{L}\{f_2\}$. Entsprechendes gilt für das zweite Integral.

15.2.1.3 Bildfunktionen spezieller Funktionen

1. Sprungfunktion Der Einheitssprung bei $t = t_0$ wird durch die Sprungfunktion (**Abb.15.7**) (s. auch 14.4.3.2,3., S. 761), auch HEAVISIDESche Sprung- oder Einheitsfunktion genannt,

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > t_0, \\ 0 & \text{für } t < t_0 \end{cases} \quad (t_0 > 0) \quad (15.25)$$

vermittelt.

■ **A:** $f(t) = u(t - t_0) \sin \omega t$, $F(p) = e^{-t_0 p} \frac{\omega \cos \omega t_0 + p \sin \omega t_0}{p^2 + \omega^2}$ (**Abb.15.8**).

■ **B:** $f(t) = u(t - t_0) \sin \omega (t - t_0)$, $F(p) = e^{-t_0 p} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ (**Abb.15.9**).

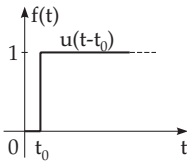


Abbildung 15.7

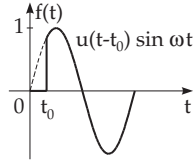


Abbildung 15.8

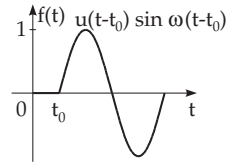


Abbildung 15.9

2. Rechteckimpuls Ein Rechteckimpuls der Höhe 1 und der Breite T (**Abb.15.10**) entsteht durch Überlagerung zweier Sprungfunktionen in der Form

$$u_T(t - t_0) = u(t - t_0) - u(t - t_0 - T) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_0, \\ 1 & \text{für } t_0 < t < t_0 + T, \\ 0 & \text{für } t > t_0 + T; \end{cases} \quad (15.26)$$

$$\mathcal{L}\{u_T(t - t_0)\} = \frac{e^{-t_0 p}(1 - e^{-Tp})}{p}. \quad (15.27)$$

3. Impulsfunktion (Diracsche Delta-Funktion) (s. auch 12.9.5, S. 705) Die Impulsfunktion $\delta(t - t_0)$ ist anschaulich als Grenzfall eines Rechteckimpulses der Breite T und der Höhe $1/T$ an der Stelle $t = t_0$ interpretierbar (**Abb.15.11**):

$$\delta(t - t_0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} [u(t - t_0) - u(t - t_0 - T)]. \quad (15.28)$$

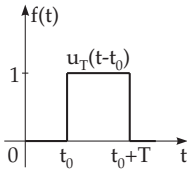


Abbildung 15.10

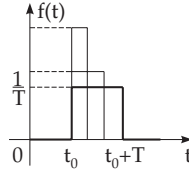


Abbildung 15.11

Für eine stetige Funktion $h(t)$ gilt:

$$\int_a^b h(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} h(t_0), & \text{falls } t_0 \text{ innerhalb } (a, b), \\ 0, & \text{falls } t_0 \text{ außerhalb } (a, b). \end{cases} \quad (15.29)$$

Beziehungen der Art

$$\delta(t - t_0) = \frac{du(t - t_0)}{dt}, \quad \mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-t_0 p} \quad (t_0 \geq 0) \quad (15.30)$$

werden im allgemeineren Sinne in der *Distributionstheorie* untersucht (s. 12.9.5.3, S. 704).

4. Stückweise differenzierbare Funktionen Die Bildfunktionen stückweise differenzierbarer Funktionen lassen sich mit Hilfe der δ -Funktion leicht angeben:

Wenn $f(t)$ stückweise differenzierbar ist und an den Stellen t_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) die Sprünge a_ν hat, dann ist ihre erste Ableitung in der Form

$$\frac{df(t)}{dt} = f'_s(t) + a_1\delta(t - t_1) + a_2\delta(t - t_2) + \dots + a_n\delta(t - t_n) \quad (15.31)$$

darstellbar, wobei in den Bereichen, in denen $f(t)$ differenzierbar ist, $f'_s(t)$ die gewöhnliche Ableitung von $f(t)$ bedeutet.

Wenn Sprünge erst in den Ableitungen auftreten, gelten für diese ganz entsprechende Formeln. Auf diese Weise lassen sich die Bildfunktionen zu Kurvenzügen, die sich aus Parabelbögen beliebig hoher Ordnung zusammensetzen (empirisch gefundene Kurven wird man meist durch solche einfachen Funktionen annähern), ohne großen Rechenaufwand angeben. Bei formaler Anwendung von (15.13) sind im Falle einer Sprungstelle die Werte $f(+0)$, $f'(+0)$, ... gleich Null zu setzen.

$$\blacksquare \text{ A: } f(t) = \begin{cases} at + b & \text{für } 0 < t < t_0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{Abb.15.12}); \quad f'(t) = a u_{t_0}(t) + b \delta(t) - (at_0 + b) \delta(t - t_0);$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{a}{p}(1 - e^{-t_0 p}) + b - (at_0 + b)e^{-t_0 p}; \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{p} \left[\frac{a}{p} + b - e^{-t_0 p} \left(\frac{a}{p} + at_0 + b \right) \right].$$

■ B:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 < t < t_0, \\ 2t_0 - t & \text{für } t_0 < t < 2t_0, \\ 0 & \text{für } t > 2t_0, \end{cases} \quad (\text{Abb.15.13}); \quad f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < t < t_0, \\ -1 & \text{für } t_0 < t < 2t_0, \\ 0 & \text{für } t > 2t_0, \end{cases} \quad (\text{Abb.15.14});$$

$$f''(t) = \delta(t) - \delta(t - t_0) - \delta(t - t_0) + \delta(t - 2t_0); \quad \mathcal{L}\{f''(t)\} = 1 - 2e^{-t_0 p} + e^{-2t_0 p}; \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(1 - e^{-t_0 p})^2}{p^2}.$$

$$\blacksquare \text{ C: } f(t) = \begin{cases} E t / t_0 & \text{für } 0 < t < t_0, \\ E & \text{für } t_0 < t < T - t_0, \\ -E(t - T) / t_0 & \text{für } T - t_0 < t < T, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{Abb.15.15});$$

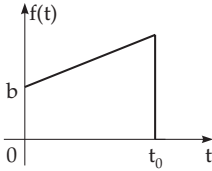


Abbildung 15.12

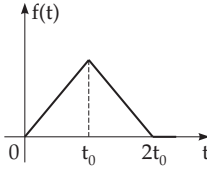


Abbildung 15.13

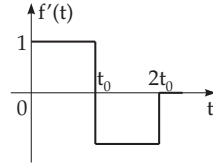


Abbildung 15.14

$$f'(t) = \begin{cases} E/t_0 & \text{für } 0 < t < t_0, \\ 0 & \text{für } t_0 < t < T - t_0, \quad (t > T), \\ -E/t_0 & \text{für } T - t_0 < t < T, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{Abb.15.16});$$

$$f''(t) = \frac{E}{t_0}\delta(t) - \frac{E}{t_0}\delta(t-t_0) - \frac{E}{t_0}\delta(t-T+t_0) + \frac{E}{t_0}\delta(t-T); \quad \mathcal{L}\{f''(t)\} = \frac{E}{t_0} [1 - e^{-t_0 p} - e^{-(T-t_0)p} + e^{-Tp}];$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{E}{t_0} \frac{(1 - e^{-t_0 p})(1 - e^{-(T-t_0)p})}{p^2}.$$

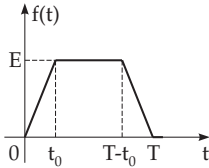


Abbildung 15.15

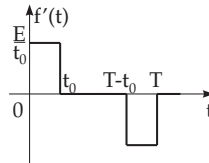


Abbildung 15.16

■ D:

$$f(t) = \begin{cases} t - t^2 & \text{für } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{Abb.15.17}); \quad f'(t) = \begin{cases} 1 - 2t & \text{für } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{Abb.15.18});$$

$$f''(t) = -2u_1(t) + \delta(t) + \delta(t-1);$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -\frac{2}{p}(1 - e^{-p}) + 1 + e^{-p}; \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 + e^{-p}}{p^2} - \frac{2(1 - e^{-p})}{p^3}.$$

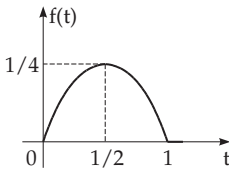


Abbildung 15.17

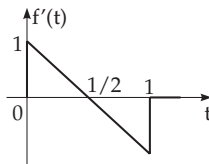


Abbildung 15.18

5. Periodische Funktionen Die Bildfunktion einer periodischen Funktion $f^*(t)$ mit der Periode T , die durch periodische Fortsetzung einer Funktion $f(t)$ entsteht, ergibt sich aus der LAPLACE-Transformierten von $f(t)$, multipliziert mit dem *Periodisierungsfaktor*

$$(1 - e^{-Tp})^{-1}. \quad (15.32)$$

■ **A:** Die periodische Fortsetzung von $f(t)$ aus Beispiel **B** (s. oben) mit der Periode $T = 2t_0$ ergibt $f^*(t)$ mit $\mathcal{L}\{f^*(t)\} = \frac{(1 - e^{-t_0 p})^2}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2t_0 p}} = \frac{1 - e^{-t_0 p}}{p^2(1 + e^{-t_0 p})}$.

■ **B:** Die periodische Fortsetzung von $f(t)$ aus Beispiel **C** (s. oben) mit der Periode T ergibt $f^*(t)$ mit $\mathcal{L}\{f^*(t)\} = \frac{E(1 - e^{-t_0 p})(1 - e^{-(T-t_0)p})}{t_0 p^2(1 - e^{-Tp})}$.

15.2.1.4 Diracsche Delta-Funktion und Distributionen

Bei der Beschreibung gewisser technischer Systeme durch lineare Differentialgleichungen treten häufig $u(t)$ und $\delta(t)$ als Stör- oder Eingangsfunktion auf, obwohl die in 15.2.1.1, S. 775 geforderten Voraussetzungen für die eindeutige Lösbarkeit nicht erfüllt sind: $u(t)$ ist unstetig, $\delta(t)$ ist im Sinne der klassischen Analysis nicht definierbar.

Einen Ausweg zeigt die Distributionstheorie durch die Einführung der sogenannten *verallgemeinerten Funktionen (Distributionen)*, unter die sich z.B. die bekannten stetigen, reellen Funktionen und $\delta(t)$ einordnen lassen, wobei die notwendigen Differenzierbarkeitseigenschaften gewährleistet sind. Die Distributionen gestatten verschiedene Darstellungen. Zu den bekanntesten gehört die von L. SCHWARTZ eingeführte stetige reelle Linearform (s. S. 703 und [12.14]).

Den periodischen Distributionen lassen sich analog zu den reellen Funktionen FOURIER-Koeffizienten und FOURIER-Reihen eindeutig zuordnen (s. 7.4, S. 477).

1. Approximationen der Delta-Funktion

Analog zu (15.28) kann die Impulsfunktion $\delta(t)$ durch einen Rechteckimpuls der Breite ε und der Höhe $1/\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) approximiert werden:

$$f(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } |t| < \varepsilon/2, \\ 0 & \text{für } |t| \geq \varepsilon/2. \end{cases} \quad (15.33a)$$

Weitere Beispiele für die Approximation von $\delta(t)$ sind Glockenkurven (s. 2.6.3, S. 73) und LORENTZ-Funktionen (s. 2.11.2, S. 95):

$$f(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} \quad (\varepsilon > 0), \quad (15.33b)$$

$$f(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon/\pi}{t^2 + \varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0). \quad (15.33c)$$

Allen diesen Funktionen sind die folgenden Eigenschaften gemeinsam:

$$1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \varepsilon) dt = 1. \quad (15.34a)$$

$$2. \quad f(-t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \text{ d.h., es sind gerade Funktionen.} \quad (15.34b)$$

$$3. \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t, \varepsilon) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0, \\ 0 & \text{für } t \neq 0. \end{cases} \quad (15.34c)$$

2. Eigenschaften der Delta-Funktion

Wichtige Eigenschaften der δ -Funktion im Hinblick auf ihre Anwendung sind:

$$1. \quad \int_{x-a}^{x+a} f(t)\delta(t-x) dt = f(x) \quad (f \text{ stetig, } a > 0). \quad (15.35)$$

$$2. \quad \delta(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\delta(x) \quad (\alpha > 0). \quad (15.36)$$

$$3. \quad \delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad \text{mit } g(x_i) = 0 \text{ und } g'(x_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (15.37)$$

d.h. die Nullstellen von $g(x)$ müssen einfach sein. Dabei sind sämtliche Nullstellen von $g(x)$ zu berücksichtigen.

4. n -te Ableitung der Delta-Funktion: Nach n -maliger partieller Integration erhält man aus

$$f^{(n)}(x) = \int_{x-a}^{x+a} f^{(n)}(t) \delta(t-x) dt \quad (15.38a)$$

eine Vorschrift für die n -te Ableitung der δ -Funktion:

$$(-1)^n f^{(n)}(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(t) \delta^{(n)}(t-x) dt. \quad (15.38b)$$

15.2.2 Rücktransformation in den Originalbereich

Für die Rücktransformation in den Originalbereich stehen folgende Wege zur Verfügung:

1. Benutzung einer Tabelle zusammengehöriger Original- und Bildfunktionen, auch Korrespondenzen genannt (s. **Tabelle 21.13**, S. 1118).
2. Zurückführung auf bekannte Korrespondenzen durch Umformung (s. 15.2.2.2, S. 783 und 15.2.2.3, S. 784).
3. Auswertung der Umkehrformel (s. 15.2.2.4, S. 785).

15.2.2.1 Rücktransformation mit Hilfe von Tabellen

Die Benutzung der Tafeln wird hier an einem Beispiel aus **Tabelle 21.13**, S. 1118 demonstriert. Weitere ausführliche Tafeln sind in [15.3] enthalten.

$$\blacksquare \quad F(p) = \frac{1}{(p+c)(p^2+\omega^2)} = F_1(p) \cdot F_2(p), \quad \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+\omega^2}\right\} = \frac{1}{\omega} \sin \omega t = f_1(t),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_2(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+c}\right\} = e^{-ct} = f_2(t). \quad \text{Durch Anwendung des Faltungssatzes (15.23) erhält man:}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p) \cdot F_2(p)\} \\ &= \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-c(t-\tau)} \frac{\sin \omega \tau}{\omega} d\tau = \frac{1}{c^2 + \omega^2} \left(\frac{c \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{\omega} + e^{-ct} \right). \end{aligned}$$

15.2.2.2 Partialbruchzerlegung

1. Prinzip Häufig treten in den Anwendungen Bildfunktionen der Form $F(p) = H(p)/G(p)$ auf, wobei $G(p)$ ein Polynom in p darstellt. Hat man die Originalfunktionen zu $H(p)$ und $1/G(p)$ gefunden, dann erhält man die gesuchten Originalfunktionen zu $F(p)$ durch Anwendung des Faltungssatzes.

2. Einfache reelle Nullstellen von $G(p)$ Hat die Bildfunktion $1/G(p)$ nur einfache Pole p_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$), dann gilt für sie die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{G(p)} = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{G'(p_\nu)(p-p_\nu)}. \quad (15.39)$$

Daher lautet die zugehörige Originalfunktion

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{G(p)}\right\} = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{G'(p_\nu)} e^{p_\nu t}. \quad (15.40)$$

3. Heavysidescher Entwicklungssatz Ist die Zählerfunktion $H(p)$ ebenfalls ein Polynom von p , aber von niedrigerem Grade als $G(p)$, dann erhält man die Originalfunktion zu $F(p)$ mit Hilfe der nach

HEAVYSIDE benannten Formel

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^n \frac{H(p_\nu)}{G'(p_\nu)} e^{p_\nu t}. \quad (15.41)$$

4. Komplexe Nullstellen Treten komplexe Wurzeln im Nenner auf, dann kann man den HEAVYSIDESchen Entwicklungssatz in der gleichen Weise anwenden. Man kann auch jeweils konjugiert komplexe Glieder, die im Falle komplexer Nullstellen stets vorhanden sein müssen, zu einem quadratischen Ausdruck zusammenfassen, dessen Rücktransformation wie auch im Falle mehrfacher Nullstellen von $G(p)$ mit Hilfe der Tabelle der Korrespondenzen durchgeführt werden kann.

■ $F(p) = \frac{1}{(p+c)(p^2+\omega^2)}$, d.h., $H(p) = 1$, $G(p) = (p+c)(p^2+\omega^2)$, $G'(p) = 3p^2+2pc+\omega^2$. Die Pole $p_1 = -c$, $p_2 = i\omega$, $p_3 = -i\omega$ sind sämtlich einfach. Nach dem HEAVYSIDESchen Satz erhält man $f(t) = \frac{1}{\omega^2+c^2} e^{-ct} - \frac{1}{2\omega(\omega-ic)} e^{i\omega t} - \frac{1}{2\omega(\omega+ic)} e^{-i\omega t}$ oder durch Partialbruchzerlegung und Korrespondenztabelle $F(p) = \frac{1}{\omega^2+c^2} \left[\frac{1}{p+c} + \frac{c-p}{p^2+\omega^2} \right]$, $f(t) = \frac{1}{\omega^2+c^2} \left[e^{-ct} + \frac{c}{\omega} \sin \omega t - \cos \omega t \right]$. Die beiden Ausdrücke für $f(t)$ sind identisch.

15.2.2.3 Reihenentwicklungen

Um $f(t)$ aus $F(p)$ zu gewinnen, versucht man bisweilen, $F(p)$ in eine Reihe $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(p)$ zu entwickeln, deren Glieder $F_n(p)$ bekannte Bildfunktionen sind, d.h. $F_n(p) = \mathcal{L}[f_n(t)]$.

1. $F(p)$ – eine absolut konvergente Reihe Wenn $F(p)$ in eine für $|p| > R$ absolut konvergente Reihe der Form

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{\lambda_n}} \quad (15.42)$$

entwickelt werden kann, wobei die λ_n eine beliebig aufsteigende Zahlenfolge $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots < \dots \rightarrow \infty$ bilden, so ist eine gliedweise Rücktransformation möglich:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{\lambda_n-1}}{\Gamma(\lambda_n)}. \quad (15.43)$$

Mit Γ ist die Gammafunktion (s. 8.2.5,6., S. 517) bezeichnet. Speziell erhält man für $\lambda_n = n+1$,

d.h. $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}$, die Reihe $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} t^n$, die für alle reellen und komplexen t konvergiert.

Außerdem ist eine Abschätzung in der Form $|f(t)| < C e^{c|t|}$, (C, c reelle Konstanten) möglich.

■ $F(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{p^{2n+1}}$. Nach gliedweiser Transformation in den

Oberbereich erhält man $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = J_0(t)$ (BESSEL-Funktion

0-ter Ordnung).

2. $F(p)$ – eine meromorphe Funktion Ist $F(p)$ ist eine *meromorphe Funktion*, die sich als Quotient zweier ganzer, also in überall konvergente Potenzreihen entwickelbare Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen darstellen läßt, und die daher in eine Summe aus einer ganzen Funktion und unendlich vielen

Partialbrüchen zerlegbar ist, dann gilt der Zusammenhang

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iy_n}^{c+iy_n} e^{tp} F(p) dp = \sum_{\nu=1}^n b_\nu e^{p_\nu t} - \frac{1}{2\pi i} \int_{(K_n)} e^{tp} F(p) dp. \quad (15.44)$$

Dabei sind die p_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) Pole 1. Ordnung der Funktion $F(p)$, die b_ν die zugehörigen Residuen (s. 14.3.5.4, S. 758), die y_ν gewisse Ordinaten und K_ν gewisse Kurvenzüge, etwa Halbkreise in der in **Abb. 15.19** angedeuteten Art. Die Lösung $f(t)$ erhält man in der Form

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{p_\nu t}, \quad \text{wenn} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(K_n)} e^{tp} F(p) dp \rightarrow 0 \quad (15.45)$$

für $y \rightarrow \infty$ strebt, was allerdings nicht immer leicht nachzuweisen ist.

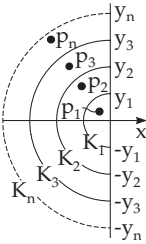


Abbildung 15.19

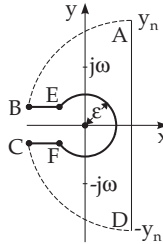


Abbildung 15.20

In manchen Fällen, wenn z.B. der rationale Anteil der meromorphen Funktion $F(p)$ identisch Null ist, bedeutet das eben gewonnene Ergebnis eine formale Übertragung des HEAVYSIDESCHEN Entwicklungssatzes auf meromorphe Funktionen.

15.2.2.4 Umkehrintegral

Die Umkehrformel

$$f(t) = \lim_{y_n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iy_n}^{c+iy_n} e^{tp} F(p) dp \quad (15.46)$$

stellt ein Integral mit komplexem Weg über eine in gewissen Gebieten analytische Funktion dar, auf das solche Methoden der Integration im Komplexen wie die Residuenrechnung oder die Verformung des Integrationsweges nach dem Satz von CAUCHY anwendbar sind.

■ $F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} e^{-\sqrt{p\alpha}}$ ist wegen des Anteiles \sqrt{p} doppeldeutig. Deshalb wird folgender Integrationsweg gewählt (**Abb. 15.20**):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(K)} e^{tp} \frac{p}{p^2 + \omega^2} e^{-\sqrt{p\alpha}} dp = \int_{\widehat{AB}} \dots + \int_{\widehat{CD}} \dots + \int_{\widehat{EF}} \dots + \int_{\widehat{DA}} \dots + \int_{\widehat{BE}} \dots + \int_{\widehat{FC}} \dots = \sum \text{Res } e^{tp} F(p) =$$

$e^{-\alpha\sqrt{\omega/2}} \cos(\omega t - \alpha\sqrt{\omega/2})$. Nach dem Lemma von JORDAN (s. 14.4.3, S. 759) verschwinden die Integrale über \widehat{AB} und \widehat{CD} für $y_n \rightarrow \infty$. Auf dem Kreisbogen \widehat{EF} (Radius ϵ) bleibt der Integrand beschränkt, und die Länge des Integrationsweges konvergiert gegen Null für $\epsilon \rightarrow 0$; daher verschwindet dieser Integralbeitrag. Es bleibt das Integral über die beiden horizontalen Strecken \widehat{BE} und \widehat{FC} zu untersuchen, wobei das obere ($p = re^{i\pi}$) und untere ($p = re^{-i\pi}$) Ufer der negativen reellen Achse zu berücksichtigen sind:

$$\int_{-\infty}^0 F(p)e^{tp} dp = -\int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r}{r^2 + \omega^2} e^{-i\alpha\sqrt{r}} dr, \quad \int_0^{\infty} F(p)e^{tp} dp = \int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r}{r^2 + \omega^2} e^{i\alpha\sqrt{r}} dr.$$

Damit erhält man endgültig:

$$f(t) = e^{-\alpha\sqrt{\omega/2}} \cos\left(\omega t - \alpha\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tr} \frac{r \sin \alpha\sqrt{r}}{r^2 + \omega^2} dr.$$

15.2.3 Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation

Schon aus den Rechenregeln für die LAPLACE-Transformation (s. 15.2.1.2, S. 776) ist zu erkennen, daß durch Anwendung der LAPLACE-Transformation komplizierte Operationen im Originalbereich wie Differentiation oder Integration durch einfache algebraische Operationen im Bildbereich ersetzt werden können. Dabei müssen allerdings, z.B. bei der Differentiation, noch Anfangsbedingungen berücksichtigt werden. Von dieser Tatsache macht man bei der Lösung von Differentialgleichungen Gebrauch.

15.2.3.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

1. Prinzip Die Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + c_1y'(t) + c_0y(t) = f(t) \quad (15.47a)$$

mit den Anfangswerten $y(+0) = y_0$, $y'(+0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(+0) = y_0^{(n-1)}$ geht durch LAPLACE-Transformation in die Gleichung

$$\sum_{k=0}^n c_k p^k Y(p) - \sum_{k=1}^n c_k \sum_{\nu=0}^{k-1} p^{k-\nu-1} y_0^{(\nu)} = F(p) \quad (c_n = 1) \quad (15.47b)$$

über. Dabei ist $G(p) = \sum_{k=0}^n c_k p^k = 0$ die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (s. 4.6.2.1, S. 319 und 9.1.2.4, S. 559).

2. Differentialgleichung 1. Ordnung Original- und Bildgleichung lauten:

$$y'(t) + c_0y(t) = f(t), \quad y(+0) = y_0, \quad (15.48a) \quad (p + c_0)Y(p) - y_0 = F(p), \quad (15.48b)$$

wobei $c_0 = \text{const}$ gilt. Für $Y(p)$ ergibt sich dann

$$Y(p) = \frac{F(p) + y_0}{p + c_0}. \quad (15.48c)$$

Spezialfall: Für $f(t) = \lambda e^{\mu t}$ ($\lambda, \mu \text{ const}$) erhält man

$$Y(p) = \frac{\lambda}{(p - \mu)(p + c_0)} + \frac{y_0}{p + c_0}, \quad (15.49b)$$

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu + c_0} e^{\mu t} + \left(y_0 - \frac{\lambda}{\mu + c_0} \right) e^{-c_0 t}. \quad (15.49c)$$

3. Differentialgleichung 2. Ordnung Original- und Bildgleichung lauten:

$$y''(t) + 2ay'(t) + by(t) = f(t), \quad y(+0) = y_0, \quad y'(+0) = y'_0. \quad (15.50a)$$

$$(p^2 + 2ap + b)Y(p) - 2ay_0 - (py_0 + y'_0) = F(p). \quad (15.50b)$$

Für $Y(p)$ ergibt sich dann

$$Y(p) = \frac{F(p) + (2a + p)y_0 + y'_0}{p^2 + 2ap + b}. \quad (15.50c)$$

Fallunterscheidungen:

$$\text{a) } b < a^2: \quad G(p) = (p - \alpha_1)(p - \alpha_2) \quad (\alpha_1, \alpha_2 \text{ reell; } \alpha_1 \neq \alpha_2), \quad (15.51a)$$

$$q(t) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}). \quad (15.51b)$$

$$\text{b) } b = a^2: \quad G(p) = (p - \alpha)^2, \quad (15.52a) \quad q(t) = t e^{\alpha t}. \quad (15.52b)$$

$$\text{c) } b > a^2: \quad G(p) \quad \text{hat komplexe Nullstellen,} \quad (15.53a)$$

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{b - a^2}} e^{-at} \sin \sqrt{b - a^2} t. \quad (15.53b)$$

Die Lösung $y(t)$ erhält man dann durch Faltung der Originalfunktionen des Zählers von $Y(p)$ mit $q(t)$. Die Anwendung der Faltung wird man zu vermeiden und die rechte Seite möglichst direkt zu transformieren suchen.

■ Die Bildgleichung für die Differentialgleichung $y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 37 \cos 3t + 9e^{-t}$ mit $y_0 = 1$ und $y'_0 = 0$ lautet $Y(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+10} + \frac{37p}{(p^2+9)(p^2+2p+10)} + \frac{9}{(p+1)(p^2+2p+10)}$.

Durch Partialbruchzerlegung des zweiten und dritten Terms der rechten Seite, wobei man die quadratischen Ausdrücke nicht in Linearfaktoren zerlegt, erhält man die Darstellung $Y(p) = \frac{-p}{p^2+2p+10} -$

$\frac{19}{(p^2+2p+10)} + \frac{p}{(p^2+9)} + \frac{18}{(p^2+9)} + \frac{1}{(p+1)}$ und nach gliedweiser Transformation (s. Tafel der Korrespondenzen 21.13, S. 1118) die Lösung $y(t) = (-\cos 3t - 6 \sin 3t)e^{-t} + \cos 3t + 6 \sin 3t + e^{-t}$.

4. Differentialgleichung n -ter Ordnung Die charakteristische Gleichung $G(p) = 0$ dieser Differentialgleichung habe nur einfache Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, von denen keine gleich Null ist. Für die Störfunktion $f(t)$ können zwei Fälle betrachtet werden.

1. Ist die Störfunktion $f(t)$ gleich der in der Praxis häufig auftretenden Sprungfunktion $u(t)$, dann lautet die Lösung:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases} \quad (15.54a) \quad y(t) = \frac{1}{G(0)} + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\alpha_\nu G'(\alpha_\nu)} e^{\alpha_\nu t}. \quad (15.54b)$$

2. Für eine allgemeine Störfunktion $f(t)$ erhält man die Lösung $\tilde{y}(t)$ aus (15.54b) in Gestalt der DUCHAMELSchen Formel, die die Faltung (s. 15.2.1.2, **11**, S. 778) benutzt:

$$\tilde{y}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t y(t-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} [y * f]. \quad (15.55)$$

15.2.3.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten

Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Polynome in t sind, eignen sich besonders für die Anwendung der LAPLACE-Transformation. Nach Anwendung der Gleichung (15.16) erhält man zwar im Bildbereich wieder eine Differentialgleichung, ihre Ordnung kann jedoch niedriger sein.

Sind speziell die Koeffizienten Polynome 1. Grades, dann ist die Differentialgleichung im Bildbereich von 1. Ordnung und dadurch meist leicht lösbar.

■ BESSELSche Differentialgleichung 0. Ordnung: $t \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{d f}{dt} + t f = 0$ (s. (9.51a) für $n = 0$, S. 565).

Die Transformation im Bildbereich ergibt

$$-\frac{d}{dp}[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)] + pF(p) - f(0) - \frac{dF(p)}{dp} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dF}{dp} = -\frac{p}{p^2+1}F(p).$$

Trennung der Veränderlichen und Integration liefert $\log F(p) = -\int \frac{p dp}{p^2+1} = -\log \sqrt{p^2+1} + \log C$,

$$F(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2+1}} \quad (C \text{ Integrationskonstante}), \quad F(t) = C J_0(t) \quad (\text{s. Beispiel S. 784 unten}).$$

15.2.3.3 Partielle Differentialgleichungen

1. Allgemeine Vorgehensweise

Die Lösung einer partiellen Differentialgleichung ist eine Funktion mindestens zweier Variabler: $u = u(x, t)$. Da die LAPLACE-Transformation eine Integration bezüglich einer Variablen darstellt, ist die andere Variable bei der Transformation als konstant zu betrachten:

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt = U(x, p). \quad (15.56)$$

Auch bei der Transformation von Ableitungen bleibt x fest:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right\} &= p \mathcal{L}\{u(x, t)\} - u(x, +0), \\ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\right\} &= p^2 \mathcal{L}\{u(x, t)\} - u(x, +0)p - u_t(x, +0). \end{aligned} \quad (15.57)$$

Für die Ableitungen nach x ist vorauszusetzen, daß sie mit dem LAPLACE-Integral vertauschbar sind:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}\{u(x, t)\} = \frac{\partial}{\partial x} U(x, p). \quad (15.58)$$

Damit erhält man im Unterbereich eine gewöhnliche Differentialgleichung. Außerdem sind die Rand- und Anfangsbedingungen in den Bildbereich zu transformieren.

2. Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung für ein homogenes

Medium

1. Problemstellung Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit verschwindendem Störglied und für ein homogenes Medium sei in der Form

$$u_{xx} - a^{-2}u_t = u_{xx} - u_y = 0 \quad (15.59a)$$

in dem Grundgebiet $0 < t < \infty$, $0 < x < l$ und mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$u(x, +0) = u_0(x), \quad u(+0, t) = a_0(t), \quad u(l-0, t) = a_1(t) \quad (15.59b)$$

gegeben. Die Zeitkoordinate wurde durch die Substitution $y = at$ ersetzt. Wie die dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung (s. 9.2.3.3, S. 596), so ist auch (15.59a) vom parabolischen Typ.

2. Laplace-Transformation Die Bildgleichung lautet

$$\frac{d^2U}{dx^2} = pU - u_0(x), \quad (15.60a)$$

die Randbedingungen sind

$$U(+0, p) = A_0(p), \quad U(l-0, p) = A_1(p). \quad (15.60b)$$

Die Lösung der Bildgleichung lautet dann

$$U(x, p) = c_1 e^{x\sqrt{p}} + c_2 e^{-x\sqrt{p}}. \quad (15.60c)$$

Es ist von Vorteil, zunächst zwei Partikulärlösungen U_1 und U_2 mit den Eigenschaften

$$U_1(0, p) = 1, \quad U_1(l, p) = 0, \quad (15.61a) \quad U_2(0, p) = 0, \quad U_2(l, p) = 1, \quad (15.61b)$$

herzustellen, d.h.

$$U_1(x, p) = \frac{e^{(l-x)\sqrt{p}} - e^{-(l-x)\sqrt{p}}}{e^{l\sqrt{p}} - e^{-l\sqrt{p}}}, \quad (15.61c) \quad U_2(x, p) = \frac{e^{x\sqrt{p}} - e^{-x\sqrt{p}}}{e^{l\sqrt{p}} - e^{-l\sqrt{p}}}. \quad (15.61d)$$

Die gesuchte Lösung der Bildgleichung hat dann die Form

$$U(x, p) = A_0(p)U_1(x, p) + A_1(p)U_2(x, p). \quad (15.62)$$

3. Rücktransformation Die Rücktransformation ist im Falle $l \rightarrow \infty$ besonders einfach und liefert:

$$U(x, p) = a_0(p)e^{-x\sqrt{p}}, \quad (15.63a) \quad u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a_0(t-\tau)}{\tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right) d\tau. \quad (15.63b)$$

15.3 Fourier-Transformation

15.3.1 Eigenschaften der Fourier-Transformation

15.3.1.1 Fourier-Integral

1. Fourier-Integral in komplexer Darstellung Grundlage der FOURIER-Transformation ist das FOURIER-Integral, auch *Integralformel von FOURIER* genannt: Falls eine nichtperiodische Funktion $f(t)$ in einem beliebigen endlichen Intervall den DIRICHLETSchen Bedingungen genügt (s. 7.4.1.2, 3., S. 478) und außerdem das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \quad (15.64a) \quad \text{konvergiert, dann gilt} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)} f(\tau) d\omega d\tau \quad (15.64b)$$

in jedem Punkt, in dem die Funktion $f(t)$ stetig ist, und

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \quad (15.64c)$$

in den Unstetigkeitsstellen.

2. Äquivalente Darstellungen Andere äquivalente Formen der Darstellung des FOURIER-Integrals (15.64b) sind:

$$1. \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos[\omega(t-\tau)] d\omega d\tau. \quad (15.65)$$

$$2. \quad f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad \text{mit den Koeffizienten} \quad (15.66a)$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (15.66b) \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (15.66c)$$

$$3. \quad f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos[\omega t + \psi(\omega)] d\omega. \quad (15.67)$$

$$4. \quad f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega. \quad (15.68)$$

Dabei gelten die folgenden Beziehungen:

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad (15.69a) \quad \varphi(\omega) = \psi(\omega) + \frac{\pi}{2}, \quad (15.69b)$$

$$\cos \psi(\omega) = \frac{a(\omega)}{A(\omega)}, \quad (15.69c) \quad \sin \psi(\omega) = \frac{b(\omega)}{A(\omega)}, \quad (15.69d)$$

$$\cos \varphi(\omega) = \frac{b(\omega)}{A(\omega)}, \quad (15.69e) \quad \sin \varphi(\omega) = \frac{a(\omega)}{A(\omega)}. \quad (15.69f)$$

15.3.1.2 Fourier–Transformation und Umkehrtransformation

1. Definition und Existenz der Fourier–Transformation

Die FOURIER–Transformation ist eine Integraltransformation der Form (15.1a), die aus dem FOURIER–Integral (15.64b) dadurch entsteht, daß man

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) d\tau \quad (15.70)$$

substituiert. Damit erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen der reellen Originalfunktion $f(t)$ und der im allgemeinen komplexen Bildfunktion $F(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega. \quad (15.71)$$

In der Kurzschreibweise verwendet man das Zeichen \mathcal{F} :

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (15.72)$$

Die Originalfunktion $f(t)$ heißt FOURIER–transformierbar, wenn das Integral (15.70), also ein uneigentliches Integral mit dem Parameter ω , existiert. Wenn das FOURIER–Integral nicht als gewöhnliches uneigentliches Integral existiert, ist es als CAUCHYSCHER HAUPTWERT zu verstehen (s. 8.2.3.3.1, S. 513). Die Bildfunktion $F(\omega)$ nennt man auch FOURIER–*Transformierte*; sie ist beschränkt, stetig und strebt für $|\omega| \rightarrow \infty$ gegen Null:

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} F(\omega) = 0. \quad (15.73)$$

Existenz und Beschränktheit von $F(\omega)$ folgen direkt aus der offensichtlich gültigen Ungleichung

$$|F(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\omega t} f(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt. \quad (15.74)$$

Für die Stetigkeit von $F(\omega)$ und die Eigenschaft $F(\omega) \rightarrow 0$ für $|\omega| \rightarrow \infty$ ist die Existenz der FOURIER–Transformierten eine hinreichende Bedingung. Diese Aussage wird häufig in folgender Form benutzt: Wenn die Funktion $f(t)$ in $(-\infty, \infty)$ absolut integrierbar ist, dann ist ihre FOURIER–Transformierte eine stetige Funktion von ω , und es gilt (15.73).

Die folgenden Funktionen sind nicht FOURIER–transformierbar: konstante Funktionen, beliebige periodische Funktionen (z.B. $\sin \omega t, \cos \omega t$), Potenzfunktionen, Polynome, Exponentialfunktionen (z.B. $e^{\alpha t}$, Hyperbelfunktionen).

2. Fourier–Sinus- und Fourier–Kosinus–Transformation

In der FOURIER–Transformation (15.72) kann der Integrand in Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt werden. Dann ergibt sich die FOURIER–Sinus- bzw. –FOURIERKosinus–Transformation.

1. Fourier-Sinus-Transformation

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}_s\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt. \quad (15.75a)$$

2. Fourier-Kosinus-Transformation

$$F_c(\omega) = \mathcal{F}_c\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt. \quad (15.75b)$$

3. Umrechnungsformeln Zwischen der FOURIER-Sinus- (15.75a) und der FOURIER-Kosinus-Transformation (15.75b) einerseits und der FOURIER-Transformation (15.72) andererseits bestehen die folgenden Umrechnungsformeln:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}_c\{f(t) + f(-t)\} - i\mathcal{F}_s\{f(t) - f(-t)\}, \quad (15.76a)$$

$$F_s(\omega) = \frac{i}{2}\mathcal{F}\{f(t)\text{sign } t\}, \quad (15.76b) \quad F_c(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{f(t)\}. \quad (15.76c)$$

Für gerade bzw. ungerade Funktionen $f(t)$ ergibt sich die Darstellung

$$f(t) \text{ gerade: } \mathcal{F}\{f(t)\} = 2\mathcal{F}_c\{f(t)\}, \quad (15.76d)$$

$$f(t) \text{ ungerade: } \mathcal{F}\{f(t)\} = -2i\mathcal{F}_s\{f(t)\}. \quad (15.76e)$$

3. Exponentielle Fourier-Transformation

Im Unterschied zu $F(\omega)$ gemäß (15.72) wird

$$F_e(\omega) = \mathcal{F}_e\{f(t)\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt \quad (15.77a)$$

exponentielle FOURIER-Transformation genannt. Es gilt

$$F(\omega) = 2F_e(-\omega). \quad (15.77b)$$

4. Tabellen der Fourier-Transformation

Auf Grund der Formeln (15.76a,b,c) brauchen entweder keine speziellen Tabellen für Korrespondenzen der FOURIER-Sinus- und FOURIER-Kosinus-Transformation bereitgestellt zu werden, oder man tabelliert die FOURIER-Sinus- und FOURIER-Kosinus-Transformationen und berechnet daraus mit Hilfe von (15.76a,b,c) $F(\omega)$. In **Tabelle 21.14.1**, s. S. 1124 und **Tabelle 21.14.2**, S. 1130 sind die FOURIER-Sinus-Transformation \mathcal{F}_s und die FOURIER-Kosinus-Transformation \mathcal{F}_c tabelliert, darüber hinaus in **Tabelle 21.14.3**, S. 1135) für einige Funktionen die FOURIER-Transformationen \mathcal{F} und in **Tabelle 21.14.4**, S. 1137 für einige Funktionen die exponentiellen FOURIER-Transformationen \mathcal{F}_e .

■ Die Funktion des unipolaren Rechteckimpulses $f(t) = 1$ für $|t| < t_0$, $f(t) = 0$ für $|t| > t_0$ (A.1) (**Abb.15.21**) erfüllt die Voraussetzungen der Definition des FOURIER-Integrals (15.64a). Man

erhält für die Koeffizienten gemäß (15.66b,c) $a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-t_0}^{+t_0} \cos \omega t dt = \frac{2}{\pi\omega} \sin \omega t_0$ und $b(\omega) =$

$\frac{1}{\pi} \int_{-t_0}^{+t_0} \sin \omega t dt = 0$ (A.2) und damit gemäß (15.66a) $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t_0 \cos \omega t}{\omega} d\omega$ (A.3).

5. Spektralinterpretation der Fourier-Transformation

In Analogie zur FOURIER-Reihe einer periodischen Funktion erfährt das FOURIER-Integral für eine nichtperiodische Funktion eine einfache physikalische Interpretation. Eine Funktion $f(t)$, für die das FOURIER-Integral existiert, kann gemäß (15.67) und (15.68) als Summe sinusoidaler Schwingungen mit der sich stetig ändernden Frequenz ω in der Form

$$A(\omega) d\omega \sin[\omega t + \varphi(\omega)], \quad (15.78a) \quad A(\omega) d\omega \cos[\omega t + \psi(\omega)] \quad (15.78b)$$

dargestellt werden. Der Ausdruck $A(\omega) d\omega$ gibt die Amplitude der Teilschwingungen an und $\varphi(\omega)$ und

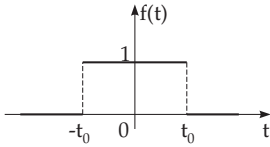


Abbildung 15.21

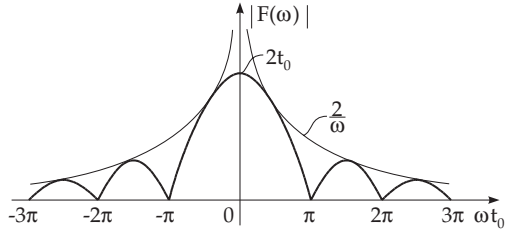


Abbildung 15.22

$\psi(\omega)$ deren Phasen. Für die komplexe Schreibweise trifft die gleiche Interpretation zu: Die Funktion $f(t)$ ist eine Summe (bzw. Integral) von ω abhängigen Summanden des Typs

$$\frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega e^{i\omega t}, \tag{15.79}$$

wobei die Größe $\frac{1}{2\pi} F(\omega)$ sowohl die Amplitude als auch die Phase aller Teilvorgänge festlegt.

Diese *spektrale Interpretation* des FOURIER-Integrals und der FOURIER-Transformation bedeutet einen großen Vorteil für die Anwendung in Physik und Technik. Die Bildfunktion

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\psi(\omega)} \quad \text{bzw.} \quad |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \tag{15.80a}$$

nennt man *Spektrum oder Frequenzspektrum der Funktion f(t)*, die Größe

$$|F(\omega)| = \pi A(\omega) \tag{15.80b}$$

das *Amplitudenspektrum* und $\varphi(\omega)$ bzw. $\psi(\omega)$ das *Phasenspektrum* der Funktion $f(t)$. Zwischen dem Spektrum $F(\omega)$ und den Koeffizienten (15.66b,c) besteht die Beziehung

$$F(\omega) = \pi [a(\omega) - ib(\omega)], \tag{15.81}$$

woraus sich die folgenden Aussagen ergeben:

1. Ist $f(t)$ eine reelle Funktion, dann ist das Amplitudenspektrum $F(\omega)$ eine gerade und das Phasenspektrum eine ungerade Funktion von ω .
2. Ist $f(t)$ eine reelle und gerade Funktion, dann ist ihr Spektrum $F(\omega)$ reell, ist $f(t)$ reell und ungerade, dann ist das Spektrum $F(\omega)$ imaginär.

■ Setzt man das Ergebnis (A.2) für den unipolaren Rechteckimpuls in 15.3.1.2.4., S. 791 in (15.81) ein, dann ergibt sich für die Bildfunktion $F(\omega)$ und für das Amplitudenspektrum $|F(\omega)|$ (**Abb.15.22**)

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \pi a(\omega) = 2 \frac{\sin \omega t_0}{\omega} \quad (\text{A.3}), \quad |F(\omega)| = 2 \left| \frac{\sin \omega t_0}{\omega} \right| \quad (\text{A.4}).$$

Die Berührungspunkte des Amplitudenspektrums $|F(\omega)|$ mit der Hyperbel $\frac{2}{\omega}$ ergeben sich für $\omega t_0 = \pm(2n + 1) \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

15.3.1.3 Rechenregeln zur Fourier-Transformation

Wie bei der LAPLACE-Transformation bereits bemerkt, versteht man unter Rechenregeln im Zusammenhang mit Integraltransformationen die Abbildung gewisser Operationen im Originalbereich auf andere Operationen im Bildbereich. Wenn vorausgesetzt wird, daß die beiden Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ im Intervall $(-\infty, \infty)$ absolut integrierbar sind und ihre FOURIER-Transformierten

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad \text{und} \quad G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} \tag{15.82}$$

gebildet werden können, dann gelten die folgenden Regeln.

1. Additions- oder Linearitätssatz

Sind α und β zwei Koeffizienten aus $(-\infty, \infty)$, dann gilt:

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega). \quad (15.83)$$

2. Ähnlichkeitssatz oder Maßstabsveränderung

Für $\alpha \neq 0$ und reell gilt

$$\mathcal{F}\{f(t/\alpha)\} = |\alpha| F(\alpha\omega). \quad (15.84)$$

3. Verschiebungssatz

Für $\alpha \neq 0$, reell und β reell gilt

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t + \beta)\} = (1/|\alpha|) e^{i\beta\omega/\alpha} F(\omega/\alpha) \quad \text{oder} \quad (15.85a)$$

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} F(\omega). \quad (15.85b)$$

Ersetzt man in (15.85b) t_0 durch $-t_0$, dann ergibt sich

$$\mathcal{F}\{f(t + t_0)\} = e^{i\omega t_0} F(\omega). \quad (15.85c)$$

4. Dämpfungssatz

Für $\alpha > 0$, reell und $\beta \in (-\infty, \infty)$ gilt

$$\mathcal{F}\{e^{i\beta t} f(\alpha t)\} = (1/\alpha) F((\omega - \beta)/\alpha) \quad \text{oder} \quad (15.86a)$$

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0). \quad (15.86b)$$

5. Differentiation im Bildbereich

Ist $t^n f(t)$ FOURIER-transformierbar, dann gilt

$$\mathcal{F}\{t^n f(t)\} = i^n F^{(n)}(\omega), \quad (15.87)$$

wobei mit $F^{(n)}(\omega)$ die n -te Ableitung von $F(\omega)$ bezeichnet ist.

6. Differentiation im Originalbereich

1. Erste Ableitung Ist eine Funktion $f(t)$ stetig und absolut integrierbar in $(-\infty, \infty)$ und strebt sie für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen Null und existiert, ausgenommen gewisse Punkte, überall die Ableitung $f'(t)$, die in $(-\infty, \infty)$ absolut integrierbar sein muß, dann gilt

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega \mathcal{F}\{f(t)\}. \quad (15.88a)$$

2. n -te Ableitung Stellt man in der Verallgemeinerung des Satzes für die 1. Ableitung an alle weiteren Ableitungen bis zur $(n-1)$ -ten $f^{(n-1)}$ die gleichen Anforderungen, dann gilt

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n \mathcal{F}\{f(t)\}. \quad (15.88b)$$

Diese Differentiationsregeln werden bei der Lösung von Differentialgleichungen angewendet (s. 15.3.2, S. 796).

7. Integration im Bildbereich

Wenn die Funktion $t^n f(t) \in (-\infty, \infty)$ absolut integrierbar ist, dann besitzt die FOURIER-transformierte der Funktion $f(t)$ n stetige Ableitungen, die mit Hilfe von

$$\frac{d^k F(\omega)}{d\omega^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} [e^{-i\omega t} f(t)] dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} t^k f(t) dt \quad (15.89a)$$

bestimmt werden. Dabei ist $k = 1, 2, \dots, n$, und es gilt:

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \frac{d^k F(\omega)}{d\omega^k} = 0. \quad (15.89b)$$

Unter den gemachten Voraussetzungen folgt aus diesen Beziehungen

$$\mathcal{F}\{t^n f(t)\} = i^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}. \quad (15.89c)$$

8. Integration im Originalbereich und Parsevalsche Formel

1. **Integrationsatz** Wenn die Voraussetzung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0 \quad (15.90a) \quad \text{erfüllt ist, dann gilt} \quad \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(t) dt \right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega). \quad (15.90b)$$

2. **PARSEVALSCHE FORMEL** Wenn die Funktion $f(t)$ sowie ihr Quadrat im Intervall $(-\infty, \infty)$ integrierbar sind, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (15.91)$$

9. Faltung

Die *zweiseitige Faltung*

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (15.92)$$

bezieht sich auf das Intervall $(-\infty, \infty)$ und existiert unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ im Intervall $(-\infty, \infty)$ absolut integrierbar sind. Wenn $f_1(t)$ und $f_2(t)$ beide für $t < 0$ verschwinden, dann ergibt sich aus (15.92) die *einseitige Faltung*

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases} \quad (15.93)$$

Diese ist somit ein Spezialfall der zweiseitigen Faltung. Während die FOURIER-Transformation die zweiseitige Faltung benutzt, verwendet die LAPLACE-Transformation die einseitige Faltung.

Für die FOURIER-Transformation der zweiseitigen Faltung gilt

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t)\} \cdot \mathcal{F}\{f_2(t)\}, \quad (15.94)$$

wenn die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)|^2 dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t)|^2 dt \quad (15.95)$$

existieren, d.h., die Funktionen und ihre Quadrate im Intervall $(-\infty, \infty)$ integrierbar sind.

■ Es ist die zweiseitige Faltung $\psi(t) = f(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f(t - \tau) d\tau$ (A.1) für die Funktion des unipolaren Rechteckimpulses (A.1) in 15.3.1.2.4., S. 791 zu berechnen.

Da $\psi(t) = \int_{-t_0}^{t_0} f(t - \tau) d\tau = \int_{t-t_0}^{t+t_0} f(\tau) d\tau$ (A.2) gilt, ergibt sich für $t < -2t_0$ und $t > 2t_0$ $\psi(\omega) = 0$

und für $-2t_0 \leq t \leq 0$ $\psi(t) = \int_{-t_0}^{t+t_0} d\tau = t + 2t_0$. (A.3)

In Analogie dazu ergibt sich für $0 < t \leq 2t_0$: $\psi(t) = \int_{t-t_0}^{t_0} d\tau = -t + 2t_0$. (A.4)

Zusammengefaßt erhält man für diese Faltung (**Abb.15.23**)

$$\psi(t) = f(t) * f(t) = \begin{cases} t + 2t_0 & \text{für } -2t_0 \leq t \leq 0, \\ -t + 2t_0 & \text{für } 0 < t \leq 2t_0, \\ 0 & \text{für } |t| > 2t_0. \end{cases} \quad (A.5)$$

Für die FOURIER-Transformierte erhält man mit (A.1) aus dem Beispiel für den unipolaren Rechteckimpuls (s. 15.3.1.2.4., S. 791 und **Abb.15.21**)

$$\Psi(\omega) = \mathcal{F}\{\psi(t)\} = \mathcal{F}\{f(t) * f(t)\} = [F(\omega)]^2 = 4 \frac{\sin^2 \omega t_0}{\omega^2} \quad (\text{A.6})$$

und für das Amplitudenspektrum der Funktion $f(t)$

$$|F(\omega)| = 2 \left| \frac{\sin \omega t_0}{\omega} \right| \quad \text{und} \quad |F(\omega)|^2 = 4 \frac{\sin^2 \omega t_0}{\omega^2}. \quad (\text{A.7})$$

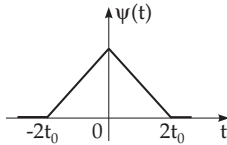


Abbildung 15.23

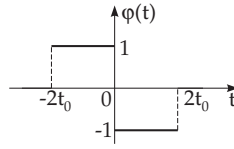


Abbildung 15.24

10. Vergleich von Fourier- und Laplace-Transformation

Zwischen FOURIER- und LAPLACE-Transformation besteht ein enger Zusammenhang, der dadurch gegeben ist, daß sich die FOURIER-Transformation als Spezialfall der LAPLACE-Transformation für den Fall $p = i\omega$ ergibt. Daraus folgt, daß jede FOURIER-transformierbare Funktion auch LAPLACE-transformierbar ist, während das Umgekehrte nur für einen kleineren Kreis von Funktionen $f(t)$ möglich ist. **Tabelle 15.2** enthält einen Vergleich einer Reihe von Eigenschaften der beiden Integraltransformationen.

Tabelle 15.2 Vergleich der Eigenschaften von FOURIER- und LAPLACE-Transformation

Fourier-Transformation	Laplace-Transformation
$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$ ω ist reell, physikalisch deutbar, z.B. als Frequenz.	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t), p\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ p ist komplex, $p = r + ix$.
Ein Verschiebungssatz.	Zwei Verschiebungssätze.
Intervall: $(-\infty, +\infty)$ Lösung von Differentialgleichungen, die Probleme mit diesem zweiseitigen Definitionsbereich beschreiben, z.B. die Wellen-Gleichung.	Intervall: $[0, \infty)$ Lösung von Differentialgleichungen, die Probleme mit diesem einseitigen Definitionsbereich beschreiben, z.B. die Wärmeleitungs-Gleichung.
Differentiationssatz enthält keine Anfangswerte.	Differentiationssatz enthält Anfangswerte.
Konvergenz des FOURIER-Integrals hängt nur von $f(t)$ ab.	Konvergenz des LAPLACE-Integrals wird durch den Faktor e^{-pt} verbessert.
Genügt der zweiseitigen Faltung.	Genügt der einseitigen Faltung.

15.3.1.4 Bildfunktionen spezieller Funktionen

■ **A:** Welche Bildfunktion gehört zur Originalfunktion $f(t) = e^{-a|t|}$, $\text{Re } a > 0$ (A.1)? Unter Berücksichtigung von $|t| = -t$ für $t < 0$ und $|t| = t$ für $t > 0$ findet man mit (15.72): $\int_{-A}^{+A} e^{-i\omega t - a|t|} dt =$

$$\int_{-A}^0 e^{-(i\omega - a)t} dt + \int_0^{+A} e^{-(i\omega + a)t} dt = -\frac{e^{-(i\omega - a)t}}{i\omega - a} \Big|_{-A}^0 - \frac{e^{-(i\omega + a)t}}{i\omega + a} \Big|_0^{+A} = \frac{-1 + e^{(i\omega - a)A}}{i\omega - a} + \frac{1 - e^{-(i\omega + a)A}}{i\omega + a}$$

(A.2). Da $|e^{-aA}| \leq e^{-A \text{Re } a}$ und $\text{Re } a > 0$ ist, existiert der Grenzwert für $A \rightarrow \infty$, so daß sich ergibt

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (\text{A.3}).$$

■ **B:** Welche Bildfunktion gehört zur Originalfunktion $f(t) = e^{-at}$, $\text{Re } a > 0$? Die Funktion ist nicht FOURIER-transformierbar, weil der Grenzwert $A \rightarrow \infty$ nicht existiert.

■ **C:** Es ist die FOURIER-Transformierte für den bipolaren Rechteckimpuls (**Abb.15.24**)

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -2t_0 < t < 0, \\ -1 & \text{für } 0 < t < 2t_0, \\ 0 & \text{für } |t| > 2t_0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

gesucht, wobei $\varphi(t)$ durch die im Beispiel in 15.3.1.2.4., S. 791 für den unipolaren Rechteckimpuls als (A.1) angegebene Gleichung ausgedrückt werden soll. Es ist $\varphi(t) = f(t+t_0) - f(t-t_0)$ (C.2). Durch die FOURIER-Transformation gemäß (15.85b), (15.85c) erhält man $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi(t)\} = e^{i\omega t_0} F(\omega) - e^{-i\omega t_0} F(\omega)$, (C.3) woraus mit (A.1) folgt: $\phi(\omega) = (e^{i\omega t_0} - e^{-i\omega t_0}) \frac{2 \sin \omega t_0}{\omega} = 4i \frac{\sin^2 \omega t_0}{\omega}$ (C.4).

■ **D:** Bildfunktion einer gedämpften Schwingung: Die in **Abb.15.25a** dargestellte gedämpfte Schwingung wird durch die Funktion $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ beschrieben. Zur Vereinfachung der Rechnung wird die FOURIER-Transformation der komplexen Funktion $f^*(t) = e^{-(\alpha+i\omega_0)t}$ ermittelt. Es gilt $f(t) = \text{Re}(f^*(t))$. Die FOURIER-Transformation liefert $\mathcal{F}\{f^*(t)\} = \int_0^\infty e^{-i\omega t} e^{-(\alpha+i\omega_0)t} dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+(\omega-\omega_0)t} dt = \frac{e^{-\alpha t} e^{i(\omega-\omega_0)t}}{-\alpha + i(\omega_0 - \omega)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha - i\omega_0 - \omega} = \frac{\alpha + i(\omega_0 - \omega)}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2}$. Das Ergebnis ist die LORENTZ- oder BREIT-WIGNER-Kurve $\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2}$ (**Abb.15.25b**) (s. auch 2.11.2, S. 95)). Einer gedämpften Schwingung im Zeitbereich entspricht ein einziger Peak im Frequenzbereich.

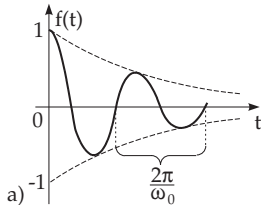


Abbildung 15.25

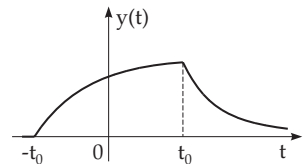
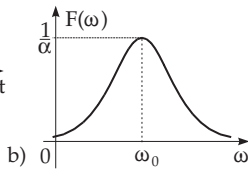


Abbildung 15.26

15.3.2 Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Fourier-Transformation

Ein wichtiger Anwendungsbereich der FOURIER-Transformation ist analog zur LAPLACE-Transformation die Lösung von Differentialgleichungen, weil diese durch die genannten Integraltransformationen eine einfache Form erhalten. Im Falle von gewöhnlichen Differentialgleichungen entstehen algebraische Gleichungen, im Falle von partiellen Differentialgleichungen gewöhnliche.

15.3.2.1 Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung

$$y'(t) + a y(t) = f(t) \quad \text{mit} \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < t_0, \\ 0 & \text{für } |t| \geq t_0, \end{cases} \quad (\text{15.96a})$$

d.h. mit der Funktion $f(t)$ von **Abb.15.21**, wird durch die FOURIER-Transformation

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega) \quad (\text{15.96b})$$

in die algebraische Gleichung

$$i\omega Y + aY = \frac{2 \sin \omega t_0}{\omega} \quad (15.96c) \quad \text{überführt, so daß sich} \quad Y(\omega) = 2 \frac{\sin \omega t_0}{\omega(a + i\omega)} \quad (15.96d)$$

ergibt. Die Rücktransformation führt auf

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{2 \frac{\sin \omega t_0}{\omega(a + i\omega)}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} \sin \omega t_0}{\omega(a + i\omega)} d\omega \quad (15.96e)$$

und

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t < -t_0, \\ \frac{1}{a} [1 - e^{-a(t+t_0)}] & \text{für } -t_0 \leq t \leq +t_0, \\ \frac{1}{a} [e^{-a(t-t_0)} - e^{-a(t-t_0)}] & \text{für } t_0 < t < \infty. \end{cases} \quad (15.96f)$$

Die Funktion (15.96f) ist in **Abb.15.26** graphisch dargestellt.

15.3.2.2 Partielle Differentialgleichungen

1. Allgemeine Vorgehensweise

Die Lösung einer partiellen Differentialgleichung ist eine Funktion mindestens zweier Variablen: $u = u(x, t)$. Da die FOURIER-Transformation eine Integration bezüglich einer Variablen darstellt, ist die andere Variable bei der Transformation als konstant zu betrachten. Hier wird x festgehalten und die Transformation bezüglich t durchgeführt:

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} u(x, t) dt = U(x, \omega). \quad (15.97)$$

Auch bei der Transformation von Ableitungen bleibt eine Variable fest, hier wieder t :

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^{(n)} u(x, t)}{\partial t^n}\right\} = (i\omega)^n \mathcal{F}\{u(x, t)\} = (i\omega)^n U(x, \omega). \quad (15.98)$$

Für die Ableitungen nach x ist voranzusetzen, daß sie mit dem FOURIER-Integral vertauschbar sind:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}[u(x, t)] = \frac{\partial}{\partial x}U(x, \omega). \quad (15.99)$$

Damit erhält man im Bildbereich eine gewöhnliche Differentialgleichung. Außerdem sind die Rand- und Anfangsbedingungen in den Bildbereich zu transformieren.

2. Lösung der eindimensionalen Wellengleichung für ein homogenes Medium

1. Problemstellung Die eindimensionale Wellengleichung mit verschwindendem Störglied und für ein homogenes Medium lautet:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0. \quad (15.100a)$$

Wie die dreidimensionale Wellengleichung (s. 9.2.3.2, S. 595), so ist auch (15.100a) eine partielle Differentialgleichung vom hyperbolischen Typ. Das CAUCHYSche Problem sei durch die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad (0 \leq t < \infty) \quad (15.100b)$$

korrekt gestellt.

2. Fourier-Transformation Zur Lösung wird die FOURIER-Transformation bezüglich x durchgeführt, wobei die Zeitkoordinate konstant gehalten wird:

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} = U(\omega, t). \quad (15.101a)$$

Daraus ergibt sich:

$$(\mathrm{i}\omega)^2 U(\omega, t) - \frac{d^2 U(\omega, t)}{dt^2} = 0 \quad \text{mit} \quad (15.101\mathrm{b})$$

$$\mathcal{F}\{u(x, 0)\} = U(\omega, 0) = \mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega), \quad (15.101\mathrm{c})$$

$$\mathcal{F}\{u_t(x, 0)\} = U'(\omega, 0) = \mathcal{F}\{g(x)\} = G(\omega). \quad (15.101\mathrm{d})$$

$$\omega^2 U + U'' = 0. \quad (15.101\mathrm{e})$$

Das Ergebnis ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für die nun wieder als Veränderliche zu betrachtende Zeitkoordinate t mit dem Parameter ω der Bildfunktion.

Die allgemeine Lösung dieser bekannten Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$U(\omega, t) = C_1 e^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 e^{-\mathrm{i}\omega t}. \quad (15.102\mathrm{a})$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingungen

$$U(\omega, 0) = C_1 + C_2 = F(\omega), \quad U'(\omega, 0) = \mathrm{i}\omega C_1 - \mathrm{i}\omega C_2 = G(\omega) \quad (15.102\mathrm{b})$$

lassen sich die Konstanten C_1 und C_2 bestimmen:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[F(\omega) + \frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega) \right], \quad C_2 = \frac{1}{2} \left[F(\omega) - \frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega) \right]. \quad (15.102\mathrm{c})$$

Die Lösung ergibt sich zu

$$U(\omega, t) = \frac{1}{2} \left[F(\omega) + \frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega) \right] e^{\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{2} \left[F(\omega) - \frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega) \right] e^{-\mathrm{i}\omega t}. \quad (15.102\mathrm{d})$$

3. Rücktransformation Zur Rücktransformation der Funktion $F(\omega)$ kann der Verschiebungssatz,

$$\mathcal{F}\{f(ax + b)\} = 1/a \cdot e^{\mathrm{i}b\omega/a} F(\omega/a), \quad (15.103\mathrm{a})$$

mit Vorteil eingesetzt werden, woraus sich ergibt

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{\mathrm{i}\omega t} F(\omega)\} = f(x + t), \quad \mathcal{F}^{-1}\{e^{-\mathrm{i}\omega t} F(\omega)\} = f(x - t). \quad (15.103\mathrm{b})$$

Die Anwendung der Integrationsregel

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} F(\omega) \quad \text{liefert} \quad (15.103\mathrm{c})$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t}\right\} = \int_{-\infty}^x \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t}\} d\tau = \int_{-\infty}^x g(\tau + t) d\tau = \int_{-\infty}^{x+t} g(z) dz \quad (15.103\mathrm{d})$$

nach Substitution $s + t = z$ und analog

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{1}{\mathrm{i}\omega} G(\omega) e^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} = -\int_{-\infty}^{x-t} g(z) dz. \quad (15.103\mathrm{e})$$

Die endgültige Lösung im Originalbereich lautet somit

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x + t) + \frac{1}{2} f(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} g(z) dz. \quad (15.104)$$

15.4 Z-Transformation

In Natur und Technik kann man zwischen kontinuierlichen und diskreten Vorgängen unterscheiden. Während sich von den kontinuierlichen Vorgängen viele durch Differentialgleichungen beschreiben lassen, führen diskrete Vorgänge häufig auf *Differenzgleichungen*. Zur Lösung von Differentialgleichungen eignen sich besonders FOURIER- und LAPLACE-Transformationen, zur Lösung von Differenzgleichungen wurden andere, angepaßte Operatorenmethoden entwickelt. Die bekannteste ist die Z-Transformation, die in engem Zusammenhang mit der LAPLACE-Transformation steht.

15.4.1 Eigenschaften der Z-Transformation

15.4.1.1 Diskrete Funktionen

Ist eine Funktion $f(t)$ ($0 \leq t < \infty$) nur für diskrete Argumente $t_n = nT$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $T > 0$, T const) bekannt, so setzt man $f(nT) = f_n$ und bildet die Folge $\{f_n\}$. Eine solche entsteht z.B. in der Elektrotechnik durch „Abtastung“ einer Funktion $f(t)$ in den diskreten Zeitpunkten t_n . Ihre Wiedergabe erfolgt dann häufig als *Treppenfunktion* (Abb.15.27).

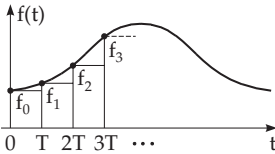


Abbildung 15.27

Die Folge $\{f_n\}$ und die nur für diskrete Argumente definierte Funktion $f(nT)$, die als *diskrete Funktion* bezeichnet wird, sind äquivalent. Für die Folge $\{f_n\}$ wird keine Konvergenz für $n \rightarrow \infty$ gefordert.

15.4.1.2 Definition der Z-Transformation

1. Originalfolge und Bildfunktion Der Folge $\{f_n\}$ wird die unendliche Reihe

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad (15.105)$$

zugeordnet. Falls diese Reihe konvergiert, sagt man, die Folge $\{f_n\}$ ist *Z-transformierbar*, und schreibt

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}. \quad (15.106)$$

Man nennt $\{f_n\}$ *Originalfolge*, $F(z)$ *Bildfunktion*. Mit z ist eine komplexe Variable bezeichnet, mit $F(z)$ eine komplexwertige Funktion.

■ $f_n = 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Die zugehörige unendliche Reihe lautet

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n. \quad (15.107)$$

Sie stellt bezüglich $1/z$ eine geometrische Reihe dar, die für $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ gegen die Reihensumme $F(z) = \frac{z}{z-1}$ konvergiert, für $\left|\frac{1}{z}\right| \geq 1$ aber divergiert. Das bedeutet, die Folge $\{1\}$ ist Z-transformierbar für

$\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, d.h. für alle Punkte außerhalb des Einheitskreises $|z| = 1$ der z -Ebene.

2. Eigenschaften Da die Bildfunktion $F(z)$ gemäß (15.105) eine Potenzreihe bezüglich der komplexen Veränderlichen $1/z$ ist, folgt aus den Eigenschaften von Potenzreihen im Komplexen (s. 14.3.1.3, S. 754):

a) Für eine Z-transformierbare Folge $\{f_n\}$ gibt es eine reelle Zahl R , so daß die Reihe (15.105) absolut konvergiert für $|z| > 1/R$ und divergiert für $|z| < 1/R$. Für $|z| \geq 1/R_0 > 1/R$ ist die Reihe sogar gleichmäßig konvergent. R ist der Konvergenzradius der Potenzreihe (15.105) bezüglich $1/z$. Konvergiert die Reihe für alle $|z| > 0$, so setzt man $R = \infty$. Für nicht Z-transformierbare Folgen setzt man $R = 0$.

b) Ist $\{f_n\}$ Z-transformierbar für $|z| > 1/R$, dann ist die zugehörige Bildfunktion $F(z)$ eine analytische

Funktion für $|z| > 1/R$ und gleichzeitig die einzige Bildfunktion von $\{f_n\}$. Für die Umkehrung gilt: Ist $F(z)$ eine analytische Funktion für $|z| > 1/R$ und auch für $z = \infty$ regulär, dann gibt es zu $F(z)$ genau eine Originalfolge $\{f_n\}$. Dabei heißt $F(z)$ regulär für $z = \infty$, wenn $F(z)$ eine Potenzreihenentwicklung der Form (15.105) besitzt und $F(\infty) = f_0$ gilt.

3. Grenzwertsätze Analog zu den Grenzwerteigenschaften der Bildfunktion der LAPLACE-Transformation ((15.7a),(15.7b) in 15.2.1.1.2., S. 775) gelten für die Z-Transformation die folgenden Grenzwertsätze:

a) Wenn $F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$ existiert, dann ist

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z). \quad (15.108)$$

Dabei kann z auf der reellen Achse oder längs eines beliebigen Weges nach ∞ verlaufen. Da die Reihen

$$z \{F(z) - f_0\} = f_1 + f_2 \frac{1}{z} + f_3 \frac{1}{z^2} + \dots, \quad (15.109)$$

$$z^2 \left\{ F(z) - f_0 - f_1 \frac{1}{z} \right\} = f_2 + f_3 \frac{1}{z} + f_4 \frac{1}{z^2} + \dots, \quad (15.110)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

offensichtlich ebenfalls Z-Transformierte sind, erhält man analog zu (15.108):

$$f_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z \{F(z) - f_0\}, \quad f_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left\{ F(z) - f_0 - f_1 \frac{1}{z} \right\}, \dots \quad (15.111)$$

Auf diese Weise kann man die Originalfunktion $\{f_n\}$ aus ihrer Bildfunktion $F(z)$ bestimmen.

b) Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ existiert, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{z \rightarrow 1+0} (z-1)F(z). \quad (15.112)$$

Man kann den Wert von $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ aus (15.112) aber nur ermitteln, wenn man weiß, daß der Grenzwert existiert, denn die obige Aussage ist nicht umkehrbar.

■ $f_n = (-1)^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Daraus folgt $\mathcal{Z}\{f_n\} = \frac{z}{z+1}$ und $\lim_{z \rightarrow 1+0} (z-1) \frac{1}{z+1} = 0$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ existiert nicht.

15.4.1.3 Rechenregeln

Für die Anwendung der Z-Transformation ist es wichtig zu wissen, wie sich gewisse Operationen an den Originalfolgen in entsprechenden Operationen an den Bildfunktionen widerspiegeln und umgekehrt. Im folgenden sei $F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$ für $|z| > 1/R$.

1. Translation

Man unterscheidet eine Vorwärts- und eine Rückwärtsverschiebung.

$$1. \text{ Erster Verschiebungssatz: } \mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = z^{-k} F(z) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (15.113)$$

dabei wird $f_{n-k} = 0$ für $n - k < 0$ festgelegt.

$$2. \text{ Zweiter Verschiebungssatz: } \mathcal{Z}\{f_{n+k}\} = z^k \left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{k-1} f_\nu \left(\frac{1}{z} \right)^\nu \right] \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (15.114)$$

2. Summation

$$\text{Für } |z| > \max\left(1, \frac{1}{R}\right) \quad \text{gilt:} \quad \mathcal{Z}\left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu \right\} = \frac{1}{z-1} F(z). \quad (15.115)$$

Die unendliche Reihe in (15.124) wird auch als *diskrete LAPLACE-Transformation* bezeichnet und mit dem Symbol \mathcal{D} gekennzeichnet:

$$\mathcal{D}\{f(t)\} = \mathcal{D}\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-np}. \quad (15.125)$$

Setzt man in (15.125) $e^p = z$, dann stellt $\mathcal{D}\{f_n\}$ eine Reihe nach absteigenden Potenzen von z dar, eine sogenannte *LAURENT-Reihe* (s. S. 756). Mit der Substitution $e^p = z$, die zu dem Namen *Z-Transformation* geführt hat, erhält man schließlich aus (15.124) den folgenden Zusammenhang zwischen *LAPLACE- und Z-Transformation* im Falle von Treppenfunktionen:

$$pF(p) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) F(z) \quad (15.126a) \quad \text{bzw.} \quad p\mathcal{L}\{f(t)\} = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \mathcal{Z}\{f_n\}. \quad (15.126b)$$

Auf diese Weise lassen sich Korrespondenzen der *Z-Transformation* (s. **Tabelle 21.15**, S. 1138) in Korrespondenzen der *LAPLACE-Transformation* (s. **Tabelle 21.13**, S. 1118) für Treppenfunktionen umrechnen und umgekehrt.

15.4.1.5 Umkehrung der Z-Transformation

Die Umkehrung der *Z-Transformation* oder kurz *Rücktransformation* besteht darin, zu einer gegebenen Bildfunktion $F(z)$ die zugehörige, eindeutige Originalfolge $\{f_n\}$ zu finden. Man schreibt dann

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \{f_n\}. \quad (15.127)$$

Für die Rücktransformation gibt es verschiedene Möglichkeiten.

1. Benutzung von Tabellen Wenn die Funktion $F(z)$ in der Tabelle explizit nicht vorkommt, kann man versuchen, durch Umformungen und durch Anwendung der Rechenregeln zu Funktionen zu gelangen, die in **Tabelle 21.15**, S. 1138 vorhanden sind.

2. LAURENT-Reihe von $F(z)$ Wegen der Definition (15.105) gelingt eine Rücktransformation sofort, wenn für $F(z)$ eine Reihenentwicklung in $1/z$ bekannt ist oder sich ermitteln läßt.

3. TAYLOR-Reihe von $F\left(\frac{1}{z}\right)$ Da $F\left(\frac{1}{z}\right)$ eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von z ist, ergibt sich wegen (15.105) nach der *TAYLOR-Formel*

$$f_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} F\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{z=0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (15.128)$$

4. Anwendung eines Grenzwertsatzes Mit Hilfe der Grenzwerte (15.108) und (15.111) kann man die Originalfolge $\{f_n\}$ aus ihrer Bildfunktion $F(z)$ unmittelbar bestimmen.

■ $F(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}$. Es sollen die voranstehenden vier Methoden angewendet werden.

1. Durch Partialbruchzerlegung (s. 1.1.7.3, S. 15) von $F(z)/z$ erhält man Funktionen, die in der **Tabelle 21.15**, S. 1138 enthalten sind.

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-1}. \quad \text{Daraus folgt}$$

$$F(z) = \frac{2z}{z-2} - \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-1} \quad \text{und} \quad f_n = 2(2^n - n - 1) \quad \text{für } n \geq 0.$$

2. Durch Division geht $F(z)$ in die folgende Reihe nach absteigenden Potenzen von z über:

$$F(z) = \frac{2z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = 2\frac{1}{z^2} + 8\frac{1}{z^3} + 22\frac{1}{z^4} + 52\frac{1}{z^5} + 114\frac{1}{z^6} + \dots \quad (15.129)$$

Daraus liest man unmittelbar $f_0 = f_1 = 0$, $f_2 = 2$, $f_3 = 8$, $f_4 = 22$, $f_5 = 52$, $f_6 = 114$, ... ab, aber man erhält keinen geschlossenen Ausdruck für das allgemeine Glied f_n .

3. Zur Bildung von $F\left(\frac{1}{z}\right)$ und den in (15.128) benötigten Ableitungen geht man zweckmäßigerweise von der Partialbruchzerlegung von $F(z)$ aus und erhält:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{2}{1-2z} - \frac{2z}{(1-z)^2} - \frac{2}{1-z}, & \text{d.h. } F\left(\frac{1}{z}\right) &= 0 \quad \text{für } z=0, \\ \frac{dF}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{4}{(1-2z)^2} - \frac{4z}{(1-z)^3} - \frac{4}{(1-z)^2}, & \text{d.h. } \frac{dF}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) &= 0 \quad \text{für } z=0, \\ \frac{d^2F}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{16}{(1-2z)^3} - \frac{12z}{(1-z)^4} - \frac{12}{(1-z)^3}, & \text{d.h. } \frac{d^2F}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right) &= 4 \quad \text{für } z=0, \\ \frac{d^3F}{dz^3}\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{96}{(1-2z)^4} - \frac{48z}{(1-z)^5} - \frac{48}{(1-z)^4}, & \text{d.h. } \frac{d^3F}{dz^3}\left(\frac{1}{z}\right) &= 48 \quad \text{für } z=0, \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Formeln in (15.128) ergibt sich $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$

4. Die Anwendung der Grenzwertsätze (s. S. 800) unter Beachtung der *BERNOULLISchen Regel* (s. S. 56) ergibt:

$$\begin{aligned} f_0 &= \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = 0, \\ f_1 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z(F(z) - f_0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^2}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = 0, \\ f_2 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left(F(z) - f_0 - f_1 \frac{1}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = 2, \\ f_3 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left(F(z) - f_0 - f_1 \frac{1}{z} - f_2 \frac{1}{z^2} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left(\frac{2z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} - \frac{2}{z^2} \right) = 8, \dots \end{aligned}$$

Auf diese Weise läßt sich die Originalfolge $\{f_n\}$ sukzessiv bestimmen.

15.4.2 Anwendungen der Z-Transformation

15.4.2.1 Allgemeine Lösung linearer Differenzgleichungen

Eine lineare Differenzgleichung k -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + a_2 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = g_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (15.130)$$

Dabei ist k eine natürliche Zahl. Die Koeffizienten a_i ($i = 0, 1, \dots, k$) sind gegebene reelle oder komplexe Zahlen und hängen nicht von n ab. Es gelte $a_0 \neq 0$ und $a_k \neq 0$. Die Folge $\{g_n\}$ ist gegeben, die Folge $\{y_n\}$ ist gesucht.

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung von (15.130) werden die Werte y_0, y_1, \dots, y_{k-1} vorgegeben. Dann kann man aus (15.130) für $n = 0$ den nächsten Wert y_k ausrechnen. Aus y_1, y_2, \dots, y_k ergibt sich dann aus (15.130) für $n = 1$ der Wert y_{k+1} . Auf diese Weise kann man alle Werte y_n rekursiv ausrechnen. Mit Hilfe der Z-Transformation läßt sich jedoch für y_n eine allgemeine Darstellung angeben. Dazu wendet man den 2. Verschiebungssatz (15.114) auf (15.130) an und erhält:

$$a_k z^k [Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1} - \dots - y_{k-1} z^{-(k-1)}] + \dots + a_1 z [Y(z) - y_0] + a_0 Y(z) = G(z). \quad (15.131)$$

Dabei bedeutet $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$ und $G(z) = \mathcal{Z}\{g_n\}$. Setzt man weiterhin $a_k z^k + a_{k-1} y^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0 = p(z)$, so lautet die Lösung der sogenannten Bildgleichung (15.131)

$$Y(z) = \frac{1}{p(z)} G(z) + \frac{1}{p(z)} \sum_{i=0}^{k-1} y_i \sum_{j=i+1}^k a_j z^{j-i}. \quad (15.132)$$

Wie bei der Behandlung von linearen Differentialgleichungen mit der LAPLACE-Transformation hat man auch bei der Z-Transformation den Vorteil, daß die Anfangswerte in die Bildgleichung eingehen und daher bei der Lösung automatisch berücksichtigt werden. Aus (15.132) gewinnt man dann die gesuchte Lösung $\{y_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ durch Rücktransformation gemäß 15.4.1.5, S. 802.

15.4.2.2 Differenzgleichung 2. Ordnung (Anfangswertaufgabe)

Die Differenzgleichung 2. Ordnung lautet:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = g_n. \quad (15.133)$$

Als Anfangswerte sind y_0 und y_1 gegeben. Mit Hilfe des 2. Verschiebungssatzes erhält man zu (15.133) die Bildgleichung

$$z^2 \left[Y(z) - y_0 - y_1 \frac{1}{z} \right] + a_1 z [Y(z) - y_0] + a_0 Y(z) = G(z). \quad (15.134)$$

Setzt man $z^2 + a_1 z + a_0 = p(z)$, dann lautet die Bildfunktion

$$Y(z) = \frac{1}{p(z)} G(z) + y_0 \frac{z(z+a_1)}{p(z)} + y_1 \frac{z}{p(z)}. \quad (15.135)$$

Das Polynom $p(z)$ habe die Nullstellen α_1 und α_2 , für die $\alpha_1 \neq 0$ und $\alpha_2 \neq 0$ gelte, weil sonst $a_0 = 0$ wäre und sich die Differenzgleichung auf eine solche 1. Ordnung reduzieren würde. Durch Partialbruchzerlegung und Anwendung der **Tabelle 21.15**, S. 1138 der Z-Transformation ergibt sich aus

$$\frac{z}{p(z)} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left(\frac{z}{z - \alpha_1} - \frac{z}{z - \alpha_2} \right) & \text{für } \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ \frac{1}{(z - \alpha_1)^2} & \text{für } \alpha_1 = \alpha_2, \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{p(z)} \right\} = \{p_n\} = \begin{cases} \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} & \text{für } \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ n \alpha_1^{n-1} & \text{für } \alpha_1 = \alpha_2. \end{cases} \quad (15.136a)$$

Wegen $p_0 = 0$ ist nach dem zweiten Verschiebungssatz

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z^2}{p(z)} \right\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ z \frac{z}{p(z)} \right\} = \{p_{n+1}\} \quad (15.136b)$$

und nach dem 1. Verschiebungssatz

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{p(z)} \right\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z} \frac{z}{p(z)} \right\} = \{p_{n-1}\}. \quad (15.136c)$$

Dabei ist $p_{-1} = 0$ zu setzen. Mit Hilfe des Faltungssatzes erhält man die Originalfolge mit

$$y_n = \sum_{\nu=0}^n p_{n-1} q_{n-\nu} + y_0 (p_{n+1} + a_1 p_n) + y_1 p_1. \quad (15.136d)$$

Wegen $p_{-1} = p_0 = 0$ ergibt sich daraus mit (15.136a)

$$y_n = \sum_{\nu=2}^n g_{n-\nu} \frac{\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} - y_0 \left(\frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + a_1 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) + y_1 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}. \quad (15.136e)$$

Diese Form läßt sich noch wegen $a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ und $a_0 = \alpha_1 \alpha_2$ (s. Wurzelsätze von VIETA in 1.6.3.1.3., S. 44) noch zu

$$y_n = \sum_{\nu=2}^n g_{n-\nu} \frac{\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} - y_0 a_0 \frac{\alpha_1^{n-1} - \alpha_2^{n-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + y_1 \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (15.136f)$$

vereinfachen. Für $\alpha_1 = \alpha_2$ erhält man analog

$$y_n = \sum_{\nu=2}^n g_{n-\nu}(\nu-1)\alpha_1^{\nu-2} - y_0 a_0(n-1)\alpha_1^{n-2} + y_1 n\alpha_1^{n-1}. \quad (15.136g)$$

Bei der Differenzengleichung 2. Ordnung läßt sich die Rücktransformation der Bildfunktion $Y(z)$ auch ohne Partialbruchzerlegung durchführen, wenn man Korrespondenzen wie z.B.

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z^2 - 2az \cosh b + a^2} \right\} = a^{n-1} \frac{\sinh bn}{\sinh n} \quad (15.137)$$

benutzt und auch hier den 2. Verschiebungssatz anwendet. Mit der Substitution $a_1 = -2a \cosh b$, $a_0 = a^2$ lautet die Originalfolge zu (15.135):

$$y_n = \frac{1}{\sinh b} \left[\sum_{\nu=2}^n g_{n-\nu} a^{\nu-2} \sinh(\nu-1)b - y_0 a^n \sinh(n-1)b + y_1 a^{n-1} \sinh n b \right]. \quad (15.138)$$

Diese Formel ist günstig für eine numerische Auswertung besonders dann, wenn a_0 und a_1 komplexe Zahlen sind.

Hinweis: Die hyperbolischen Funktionen sind auch für komplexe Argumente definiert.

15.4.2.3 Differenzengleichung 2. Ordnung (Randwertaufgabe)

In den Anwendungen kommt es häufig vor, daß die Werte y_n der Differenzengleichung nur für endlich viele Indizes $0 \leq n \leq N$ gesucht sind. Im Falle einer Differenzengleichung 2. Ordnung (15.133) werden dann in der Regel die beiden *Randwerte* y_0 und y_N vorgegeben. Zur Lösung dieser Randwertaufgabe geht man von der Lösung (15.136f) der entsprechenden Anfangswertaufgabe aus, wobei an Stelle des unbekanntes Wertes y_1 jetzt y_N einzuführen ist. Dazu setzt man in (15.136f) $n = N$, dann kann man y_1 in Abhängigkeit von y_0 und y_N ausrechnen:

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1^N - \alpha_2^N} \left[y_0 a_0 (\alpha_1^{N-1} - \alpha_2^{N-1}) + y_N (\alpha_1 - \alpha_2) - \sum_{\nu=2}^N (\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}) g_{N-\nu} \right]. \quad (15.139)$$

Man setzt diesen Wert in (15.136f) ein und erhält

$$y_n = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \sum_{\nu=2}^n (\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}) g_{n-\nu} - \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1^N - \alpha_2^N} \sum_{\nu=2}^N (\alpha_1^{\nu-1} - \alpha_2^{\nu-1}) g_{N-\nu} + \frac{1}{\alpha_1^N - \alpha_2^N} [y_0 (\alpha_1^N \alpha_2^n - \alpha_1^n \alpha_2^N) + y_N (\alpha_1^n - \alpha_2^n)]. \quad (15.140)$$

Die Lösung (15.140) hat nur dann einen Sinn, wenn $\alpha_1^N - \alpha_2^N \neq 0$ gilt. Andernfalls hat das Randwertproblem keine allgemeine Lösung, sondern es treten in Analogie zu den Randwertaufgaben bei Differentialgleichungen Eigenwerte und Eigenfunktionen auf.

15.5 Wavelet-Transformation

15.5.1 Signale

Geht von einem physikalischen Objekt eine Wirkung aus, die sich ausbreitet und mathematisch z.B. durch eine Funktion oder eine Zahlenfolge beschreiben läßt, dann spricht man von einem *Signal*.

Unter *Signalanalyse* versteht man die Charakterisierung eines Signals durch eine Größe, die für das Signal typisch ist. Mathematisch bedeutet das: Die Funktion oder Zahlenfolge, die das Signal beschreibt, wird auf eine andere Funktion oder Zahlenfolge abgebildet, die die typische Eigenschaft des Signals besonders gut erkennen läßt. Bei solchen Abbildungen können allerdings auch Informationen verloren gehen.

Die Umkehrung der Signalanalyse, d.h. die Wiedergewinnung des Ausgangssignals, wird als *Signalsynthese* bezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen Signalanalyse und Signalsynthese wird am Beispiel der FOURIER-Transformation besonders deutlich: Ein Signal $f(t)$ (t Zeit) werde durch die Frequenzen ω , die in ihm enthalten sind, charakterisiert. Dann beschreibt die Formel (15.141a) die Signalanalyse, die Formel (15.141b) die Signalsynthese:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt, \quad (15.141a) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega. \quad (15.141b)$$

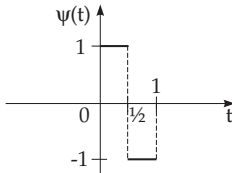
15.5.2 Wavelets

Der FOURIER-Transformation fehlt eine Lokalisierungseigenschaft, d.h. ändert sich ein Signal an einer Stelle, dann ändert sich die Transformierte überall, ohne daß durch „einfaches Hinschauen“ die Stelle der Änderung gefunden werden kann. Der Grund liegt darin, daß die FOURIER-Transformation ein Signal in *ebene Wellen* zerlegt. Diese werden durch trigonometrische Funktionen beschrieben, die beliebig lange mit derselben Periode schwingen. Bei der Wavelet-Transformation dagegen wird eine fast beliebig wählbare Funktion ψ , das *Wavelet* (kleine lokalisierte Welle), zur Analyse eines Signals verschoben und gestaucht.

Beispiele für Wavelets sind *Haar-Wavelet* (Abb.15.28a) und *Mexikanischer Hut* (Abb.15.28b).

■ **A Haar-Wavelet:**

$$\psi = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (15.142)$$



■ **B Mexikanischer Hut:**

$$\psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2} \quad (15.143)$$

$$= (1 - x^2)e^{-x^2/2}. \quad (15.144)$$

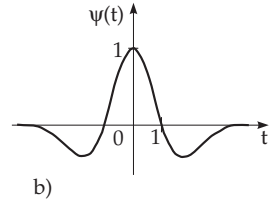


Abbildung 15.28

Allgemein gilt: Als Wavelet kommen alle Funktionen ψ in Frage, die quadratisch integrierbar sind und deren FOURIER-Transformierte $\Psi(\omega)$ gemäß (15.141a) zu einem positiven endlichen Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|}{|\omega|} d\omega \quad (15.145)$$

führen. Im Zusammenhang mit Wavelets sind die folgenden Eigenschaften und Definitionen wichtig:

1. Für den Mittelwert von Wavelets gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (15.146)$$

2. Als k -tes Moment eines Wavelets ψ bezeichnet man das Integral

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt. \quad (15.147)$$

Die kleinste positive natürliche Zahl n , für die $\mu_n \neq 0$ gilt, heißt *Ordnung* des Wavelets ψ .

■ Für das HAAR-Wavelet (15.142) gilt $n = 1$, für den mexikanischen Hut (15.144) $n = 2$.

3. Falls $\mu_k = 0$ für alle k gilt, ist ψ von unendlicher Ordnung. Wavelets mit beschränktem Träger

haben stets eine endliche Ordnung.

4. Ein Wavelet der Ordnung n ist orthogonal zu allen Polynomen vom Grade $\leq n - 1$.

15.5.3 Wavelet-Transformation

Zu einem Wavelet $\psi(t)$ kann man mit Hilfe eines Parameters a eine ganze Schar von Funktionen bilden:

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (a \neq 0). \quad (15.148)$$

Im Falle $|a| > 0$ wird die Ausgangsfunktion $\psi(t)$ gestaucht. Im Falle $a < 0$ wird zusätzlich eine Spiegelung vorgenommen. Der Faktor $1/\sqrt{|a|}$ ist ein Skalierungsfaktor.

Mit Hilfe eines zweiten Parameters b können die Funktionen $\psi_a(t)$ noch verschoben werden. Man erhält dann die zweiparametrische Kurvenschar

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (a, b \text{ reell; } a \neq 0). \quad (15.149)$$

Der reelle Verschiebungsparameter b charakterisiert den Zeitpunkt (bzw. den Ort), während der Parameter a die Ausdehnung der Funktion $\psi_{a,b}(t)$ angibt. Die Funktion $\psi_{a,b}(t)$ wird im Zusammenhang mit der *Wavelet-Transformation* als *Basisfunktion* bezeichnet.

Die Wavelet-Transformation einer Funktion $f(t)$ ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{L}_\psi f(a, b) = c \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt = \frac{c}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (15.150a)$$

Für die Rücktransformation gilt:

$$f(t) = c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db. \quad (15.150b)$$

Dabei ist c eine Konstante, die vom speziellen Wavelet ψ abhängt.

■ Unter Verwendung des HAAR-Wavlets (15.144) erhält man

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } b \leq t < b + a/2, \\ -1 & \text{für } b + a/2 \leq t < b + a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi f(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left(\int_b^{b+a/2} f(t) dt - \int_{b+a/2}^{b+a} f(t) dt \right) \\ &= \frac{\sqrt{|a|}}{2} \left(2 \int_b^{b+a/2} f(t) dt - 2 \int_{b+a/2}^{b+a} f(t) dt \right). \end{aligned} \quad (15.151)$$

Der Wert $\mathcal{L}_\psi f(a, b)$ gemäß (15.151) stellt eine Differenz von Mittelwerten der Funktion $f(t)$ über zwei benachbarten Intervallen der Länge $\frac{|a|}{2}$ um den Punkt b dar.

Bemerkungen:

1. In den Anwendungen spielt die *dyadische Wavelet-Transformation* eine große Rolle. Als Basisfunktionen verwendet sie die Funktionen

$$\psi_{i,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^i}} \psi\left(\frac{t-2^i j}{2^i}\right), \quad (15.152)$$

d.h. die verschiedenen Basisfunktionen ergeben sich aus einem Wavelet $\psi(t)$ durch Verdoppeln oder Halbieren der Breite und durch Verschieben um ganzzahlige Vielfache der Breite.

2. Als *orthogonales Wavelet* bezeichnet man ein Wavelet $\psi(t)$, bei dem die gemäß (15.152) erzeugten Basisfunktionen eine orthogonale Basis bilden.

3. Besonders gute numerische Eigenschaften haben DAUBECHIES–Wavelets. Das sind orthogonale Wavelets mit einem kompakten Träger, d.h. sie sind nur auf einem Teil der Zeitachse von Null verschieden. Für sie gibt es aber keine geschlossene Darstellung (s. [15.10]).

15.5.4 Diskrete Wavelet–Transformation

15.5.4.1 Schnelle Wavelet–Transformation

Man kann davon ausgehen, daß die Integraldarstellung (15.150b) hochgradig redundant ist und somit das Doppelintegral ohne Informationsverlust durch eine Doppelsumme ersetzt werden kann. Das wird bei der konkreten Anwendung der Wavelet–Transformation berücksichtigt. Man benötigt dazu:

1. eine effiziente Berechnung der Transformation, was auf das Konzept der *Multi–Skalen–Analyse* führt sowie

2. eine effiziente Berechnung der Rücktransformation, d.h. eine effiziente Rekonstruktion von Signalen aus ihrer Wavelet–Transformation, was auf das Konzept der *Frames* führt.

Für beide Konzepte muß auf die Literatur verwiesen werden (s. [15.10], [15.1]).

Hinweis: Der große Erfolg der Wavelets in den verschiedenen Anwendungsgebieten, z.B.

- bei der Berechnung physikalischer Größen aus Meßreihen,
 - bei der Bild- oder Spracherkennung sowie
 - bei der Datenkompression im Rahmen der Nachrichtenübertragung
- beruht auf seinen „schnellen Algorithmen“. Analog zur FFT (Fast FOURIER–Transformation, s. S. 999) spricht man hier von FWT (Fast Wavelet–Transformation).

15.5.4.2 Diskrete Haar–Wavelet–Transformation

Als Beispiel für eine diskrete Wavelet–Transformation wird die HAAR–Wavelet–Transformation beschrieben: Von einem Signal sind die Werte f_i ($i = 1, 2, \dots, N$) gegeben. Aus diesen werden die Detailwerte d_i ($i = 1, 2, \dots, N/2$) wie folgt berechnet:

$$s_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2i-1} + f_{2i}), \quad d_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2i-1} - f_{2i}). \quad (15.153)$$

Die Werte d_i werden abgespeichert, während auf die Werte s_i die Vorschrift (15.153) angewendet wird, d.h. in (15.153) werden die Werte f_i durch die Werte s_i ersetzt. Diese Vorgehensweise wird fortgesetzt, so daß sich aus

$$s_i^{(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_{2i-1}^{(n)} + s_{2i}^{(n)}), \quad d_i^{(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_{2i-1}^{(n)} - s_{2i}^{(n)}) \quad (15.154)$$

schließlich eine Folge von Detailvektoren mit den Komponenten $d_i^{(n)}$ ergibt. Jeder Detailvektor enthält Informationen über Eigenschaften des Signals.

Hinweis: Für große Werte von N konvergiert die diskrete Wavelet–Transformation gegen die Integral–Wavelet–Transformation (15.150a).

15.5.5 Gabor–Transformation

Zeit–Frequenz–Analyse nennt man die Charakterisierung eines Signals bezüglich der in ihm enthaltenen Frequenzen und der Zeitpunkte, zu denen diese Frequenzen auftreten. Dazu wird das Signal in zeitliche Abschnitte (Fenster) aufgeteilt und anschließend nach FOURIER transformiert. Man spricht deshalb auch von einer „gefensterten FOURIER–Transformation“ WFT (Windowed FOURIER–Transformation).

Die Fensterfunktion ist so zu wählen, daß sie ein Signal außerhalb eines Fensters ausblendet. Von GABOR wurde als Fensterfunktion

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (15.155)$$

verwendet (Abb. 15.29). Diese Wahl kann damit erklärt werden, daß $g(t)$ mit der „Gesamtmasse 1“ um den Punkt $t = 0$ konzentriert ist und die Fensterbreite als konstant (etwa 2σ) angesehen werden kann.

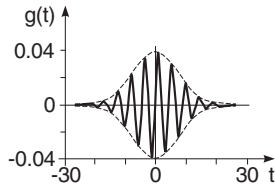


Abbildung 15.29

Die GABOR-Transformation einer Funktion $f(t)$ ist dann von der Form

$$\mathcal{G}f(\omega, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-s)e^{-i\omega t} dt. \quad (15.156)$$

Sie gibt an, mit welcher komplexen Amplitude die Grundschwingung $e^{i\omega t}$ während des Zeitintervalls $[s - \sigma, s + \sigma]$ in f vertreten ist, d.h., tritt die Frequenz ω in diesem Intervall auf, dann besitzt sie die Amplitude $|\mathcal{G}f(\omega, s)|$.

15.6 Walsh-Funktionen

15.6.1 Treppenfunktionen

Bei der Approximation von Funktionen spielen orthogonale Funktionensysteme, z.B. spezielle Polynome oder trigonometrische Funktionen, eine wichtige Rolle, weil sie glatt, d.h. hinreichend oft differenzierbar in dem betrachteten Intervall sind. Es gibt aber auch Probleme, z.B. die Übertragung der Bildpunkte eines gerasterten Bildes, für deren mathematische Behandlung glatte Funktionen nicht geeignet sind, sondern sich *Treppenfunktionen*, also stückweise konstante Funktionen besser eignen. WALSH-Funktionen sind sehr einfache Treppenfunktionen. Sie nehmen nur die zwei Funktionswerte $+1$ und -1 an. Diese zwei Funktionswerte entsprechen zwei Zuständen, so daß WALSH-Funktionen besonders einfach in Computern realisiert werden können.

15.6.2 Walsh-Systeme

Analog zu den trigonometrischen Funktionen werden periodische Treppenfunktionen betrachtet. Man verwendet das Intervall $I = [0, 1)$ als Periodenintervall und unterteilt es in 2^n gleichlange Teilintervalle. Sei S_n die Menge der periodischen Treppenfunktionen mit der Periode 1 über einer solchen Intervallteilung. Die zu S_n gehörenden Treppenfunktionen kann man als Vektoren eines endlichdimensionalen Vektorraumes auffassen, denn jede Funktion $g \in S_n$ wird durch ihre Werte $g_0, g_1, g_2, \dots, g_{2^n-1}$ in den Teilintervallen bestimmt und kann demzufolge als Vektor aufgefaßt werden:

$$\mathbf{g}^T = (g_0, g_1, g_2, \dots, g_{2^n-1}). \quad (15.157)$$

Die zu S_n gehörenden WALSH-Funktionen bilden mit einem geeigneten Skalarprodukt eine orthogonale Basis in diesem Raum. Die Basisvektoren können auf verschiedene Weise numeriert werden, so daß man sehr viele WALSH-Systeme erhält, die aber alle dieselben Funktionen enthalten. Es zeigt sich aber, daß drei Systeme zu bevorzugen sind: WALSH-KRONECKER-Funktionen, WALSH-KACZMARZ-Funktionen und WALSH-PALEY-Funktionen.

In Analogie zur FOURIER-Transformation wird die WALSH-Transformation aufgebaut, wobei die Rolle der trigonometrischen Funktionen von den WALSH-Funktionen übernommen wird. Man erhält z.B. WALSH-Reihen, WALSH-Polynome, WALSH-Sinus- und WALSH-Kosinus-Transformationen, WALSH-Integrale, und analog zur schnellen FOURIER-Transformation gibt es die schnelle WALSH-Transformation. Für eine Einführung in Theorie und Anwendung der WALSH-Funktionen s. [15.6].